Aufgaben zur 13. Übung zu „Angewandte Mathematik 1“

DET 01. Berechnen Sie die nachfolgenden Determinanten, sofern diese definiert sind:

a) $|1|$

b) $|a|, a \in \mathbb{C}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 2+3j & 1+j \\ 1-j & 0 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{vmatrix}, x \in \mathbb{C}$

h) $\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 3 & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ 4 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{vmatrix}$

DET 02. Berechnen Sie die nachfolgenden Determinanten, sofern diese definiert sind, mit der Regel von Sarrus, sofern dies möglich ist:

a) $|3|$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2j & -j & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1+j & -4+j & 0 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 0 & 1+j & 1+2j \\ 1-j & 0 & 2-3j \\ 1-2j & 2+3j & 0 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 2j & cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ -1 & sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & 0 \\ 1 & 0 & cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

DET 03. Für welche Werte $\alpha_i \in \mathbb{C}, i \in \mathbb{N}$ ist die nachfolgende Determinante a) 0, b) 5, c) $-\alpha^3$?

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha & -1 & -1 \\ 1 & 1-\alpha & 0 \\ 3 & 0 & 1-\alpha \end{vmatrix}$$

Fragen: I) Wie viele Werte α_i als Lösung einer Gleichung wie der obigen gibt es für eine Matrix mit n Zeilen und n Spalten im Allgemeinen? II) Sind alle diese Lösungen paarweise verschieden?

DET 04. Zeigen Sie allgemein für zwei Matrizen A und B mit der angegebenen Zeilen- und Spaltenzahl, ob die folgenden Gesetze gelten:
a) $det(A) + det(B) = det(A + B)$ für drei Zeilen/Spalten
b) $det(A) \cdot det(B) = det(A \cdot B)$ für zwei Zeilen/Spalten
c) $\alpha^3 \cdot det(A) = det(\alpha \cdot A)$ für drei Zeilen/Spalten

Fragen: Hängt die Kommutativität von Determinanten bzgl. I) Addition, II) Multiplikation mit jener der entsprechenden Operationen auf Matrizen zusammen? III) Wie lautet c) allgemein, d.h. für Determinanten beliebiger Größe?

DET 05. Zeigen Sie, dass für jede Matrix A mit drei Zeilen und drei Spalten gilt: $det(A) = det(A^T)$.

Fragen: Gilt dies auch I) für Matrizen mit anderer Zeilen- bzw. Spaltenzahl, II) symmetrische Matrizen?