Aufgaben zur 12. Übung zu „Angewandte Mathematik 1“

MAT 01. a) Um welche Arten von Matrizen handelt es sich bei den im Folgenden angegebenen (quadratische, Diagonal-, Dreiecks-, Einheits- oder Nullmatrix oder keine dieser Spezialformen)? b) Welche Dimensionen haben sie? c) Bei welchen handelt es sich auch um Vektoren?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad F = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}$

$G = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Fragen: Welche Matrizen könnten miteinander I) addiert, II) multipliziert werden und welche nicht?

MAT 02. Zeigen Sie durch Berechnung von $A \cdot B$ und $B \cdot A$, dass Matrizenmultiplikation im Allgemeinen nicht kommutativ ist.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

MAT 03. Zeigen Sie durch Berechnung von $(A \cdot B) \cdot C$ und $A \cdot (B \cdot C)$, dass die vorliegenden Matrizenmultiplikationen assoziativ ist.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Fragen: I) Sind diese beiden Berechnungen ausreichend, um zu zeigen, dass Matrizenmultiplikation im Allgemeinen assoziativ ist? II) Falls nicht: Wie könnte man die allgemeine Assoziativität zeigen?

MAT 04. Zeigen Sie durch Berechnung von $A \cdot B$ und $A \cdot C$, dass zwar $A \cdot B = A \cdot C$ gilt, aber $B \neq C$:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

MAT 05. Zeigen Sie anhand des nachfolgenden Beispiels, dass Matrizenmultiplikation bzgl. der -addition distributiv ist, d.h. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

MAT 06. Zeigen Sie, dass die unten angegebene Matrix A nilpotent ist, d.h., dass es eine natürliche Zahl n gibt, für die $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{n Mal}} = O$, wobei O die Nullmatrix bezeichnet.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$