Laborprotokoll SSY
Abtastung

Daniel Schrenk, Andreas Unterweger

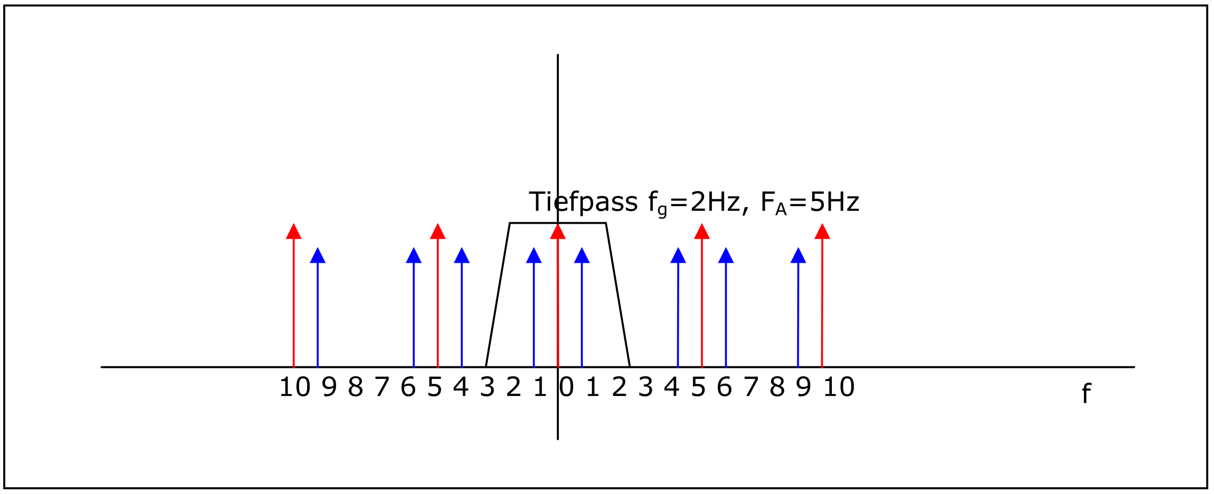
Einleitung

Ziel der Übung

In dieser Laborübung sollte ein Signal abgetastet werden und anschließend das ursprüngliche Signal aus dem abgetastetetn wiedergewonnen werden.
Nach dem Abtasttheorem von Shannon muss die Abtastfrequenz (f_A) mindestens doppelt so groß sein wie die höchste im Signal vorkommende Frequenz. In dieser Übung wird mit die Abtastfrequenz verändert und das rückgewonnene Signal betrachtet.

Hintergrund

Das Abtasten eines Signals entspricht der Überlagerung des Signals im Zeitbereich mit Diracimpulsen an den Abtaststellen.
Ein Diracimpuls ist unendlich dünn und unendlich hoch und hat genau die Fläche 1. Wird nun das Signal mit einer Folge von Diracimpulsen (die jeweils den Abstand $T_A = \frac{1}{f_A}$ haben), bleiben beim abgetasteten Signal exakt jene Stellen übrig, an denen das Signal mit den Diracimpulsen überlagert wurden (der Rest ist 0, da eien Multiplikation mit 0 (kein Diracimpuls) immer 0 ergibt).
Diese Multiplikation im Zeitbereich bedeutet eine Faltung im Frequenzbereich. Da eine Diracstoßfolge im Zeitbereich auch eine Diracstoßfolge im Frequenzbereich bedeutet, wird die Fouriertransformierte des Signals mit einer Diracstoßfolge im Frequenzbereich gefaltet.
Da die Diracstoßfolge periodisch ist, entsteht bei der Faltung ein ähnliches Bild wie in der Abbildung unten angedeutet (schematisch!). Rot sind die Diracimpulse, blau ist die höchste bzw. einzige im Signal vorkommende Frequenz (vgl. Aufgabenstellungen unten).
Die Signalfrequenz (hier 1Hz) ist durch die Faltung immer um die Diracimpulse angeordnet (jeweils 1 Hz davor bzw. danach). Bei einer Abtastfrequenz von 5Hz würde die Signalfrequenz bei 4 und 6, 9 und 11,… auftauchen, analog natürlich im Negativen.
Da das ursprüngliche Signal bei 1Hz ja noch vollständig vorhanden ist, reicht es zur Rückgewinnung des Signals aus, einen Tiefpass anzulegen, der (vgl. Abbildung) bei ca. 2Hz seine Grenzfrequenz hat. Dadurch kann das ursprüngliche Signal komplett aus dem abgetasteten wiedergewonnen werden.

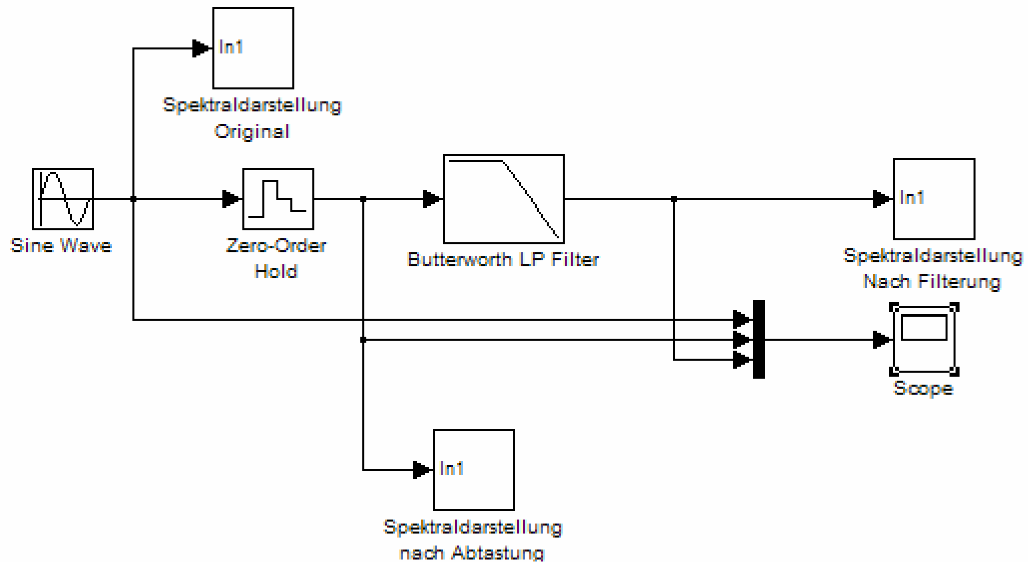


Anmerkung: Die Abbildung ist rein symbolisch zu verstehen und hat keinen Anspruch auf Genauigkeit.

Aufgabenstellungen

2.1 Abtastungsschaltung

In dieser Aufgabe geht es um das Abtasten eines Sinussignals mit 1Hz (Amplitude 1V) mit einer Abtastfrequenz von 5 Hz. Die 5 Hz liegen über 2*1Hz=2Hz, d.h. eine einwandfreie Rekonstruktion des Signals ist zu erwarten.
Schaltung:



Das Sinussignal wird durch ein Zero-Ordner-Hold-Glied geschickt, was einer Analog-Digitalwandlung entspricht (Abtastung). Anschließend wird das Signal durch einen Butterworth-Filter (besserer Tiefpass) geschickt, um das ursprüngliche Signal rückzugewinnen.
Vom Original-, abgetasteten und gefilterten Signal wird jeweils ein Abbild im Zeit- bzw. im Frequenzbereich erstellt; die Abbildung im Zeitbereich erfolgt in einem gemeinsamen Scope (per Mux).
Das Sine-Wave-Bauteil wird auf 1Hz eingestellt, das Zero-Order-Hold-Glied auf 5Hz (Abtastfrequenz). Der Butterworthfilter schneidet mit der Ordnung 20 bei f_g=2Hz ab.
Beim Einstellen der Parameter ist darauf zu achten, dass einige Angaben in rad/s angegeben werden müssen; eine Multiplikation mit 2pi schafft hierbei Abhilfe.

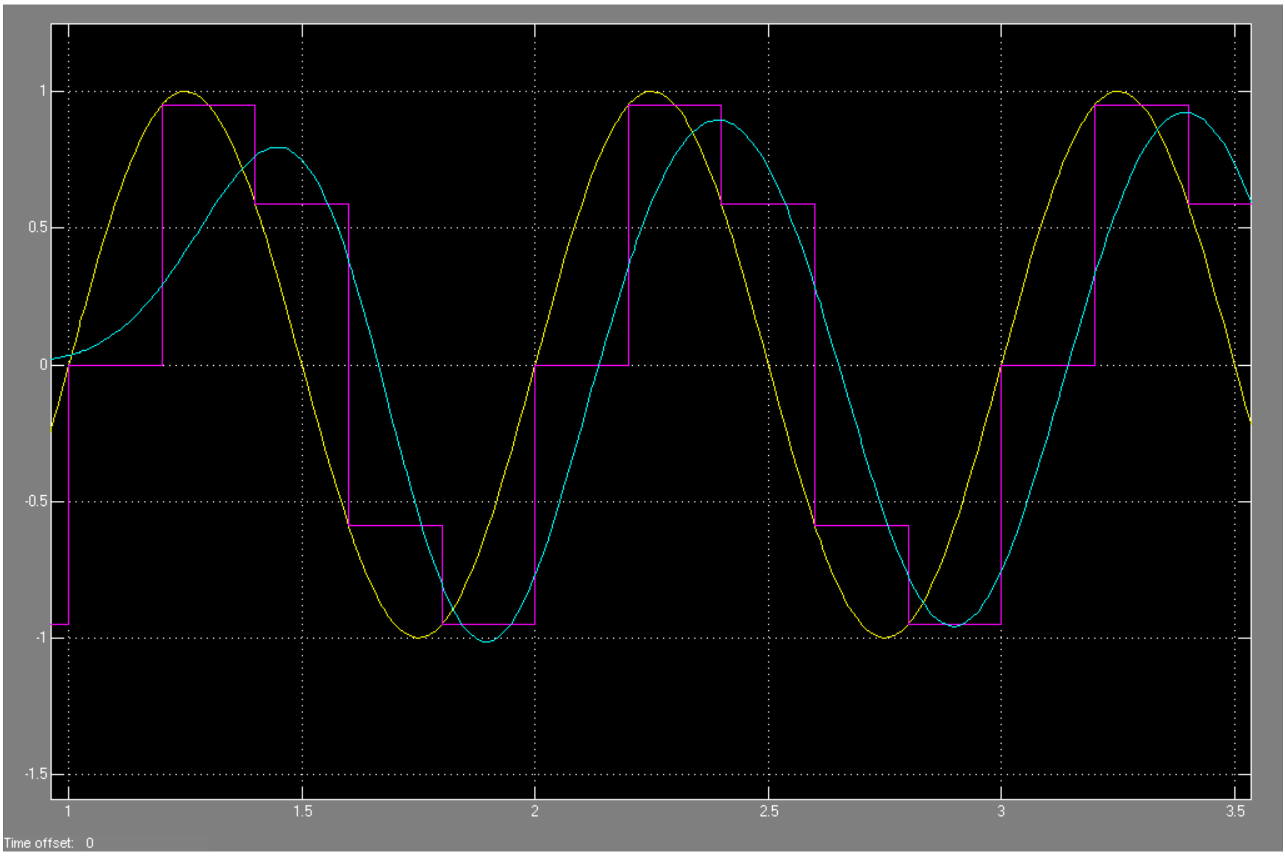


Abbildung 1: Zeitbereich (grün = ursprüngliches Signal, violett = abgetastetes Signal, hellblau = rückgewonnenes Signal). Man sieht deutlich, dass sich das Signal einwandfrei wiederherstellen lässt. Die Phasenverschiebung ist durch den Filter bedingt.

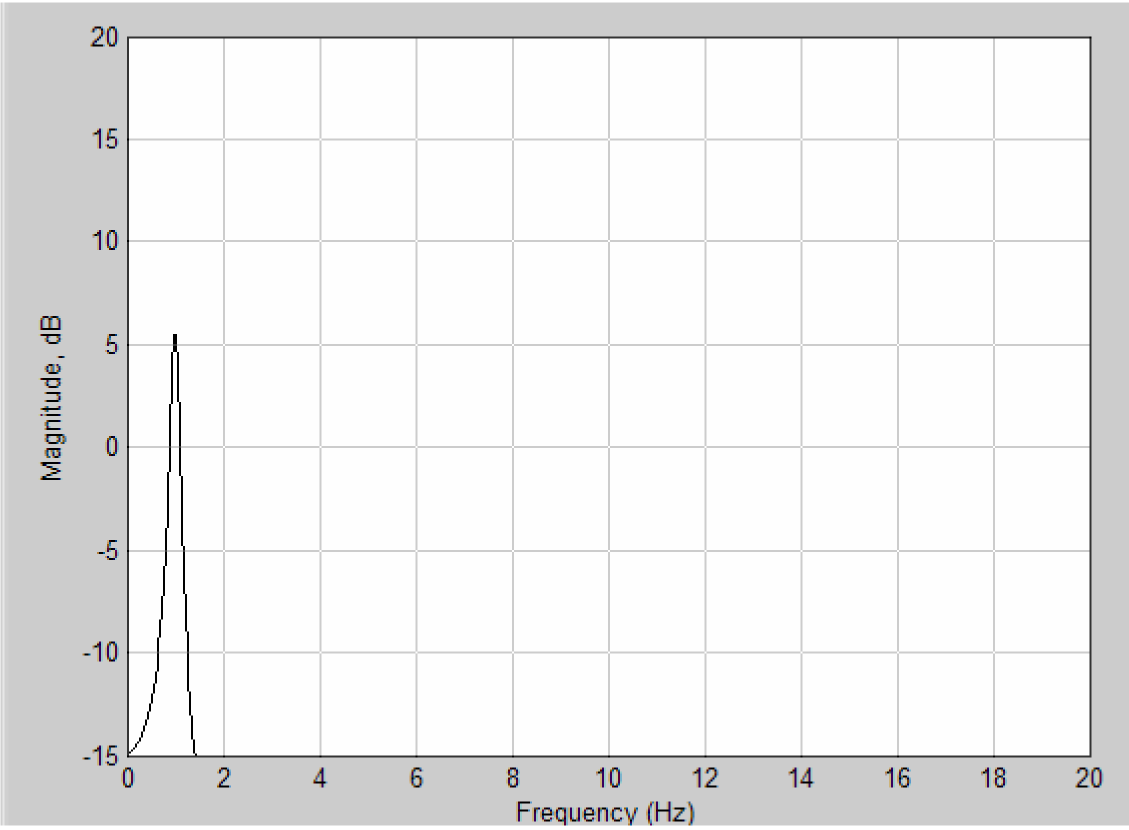


Abbildung 2: Frequenzbereich ursprüngliches Signal; Signalfrequenz 1Hz gut erkennbar

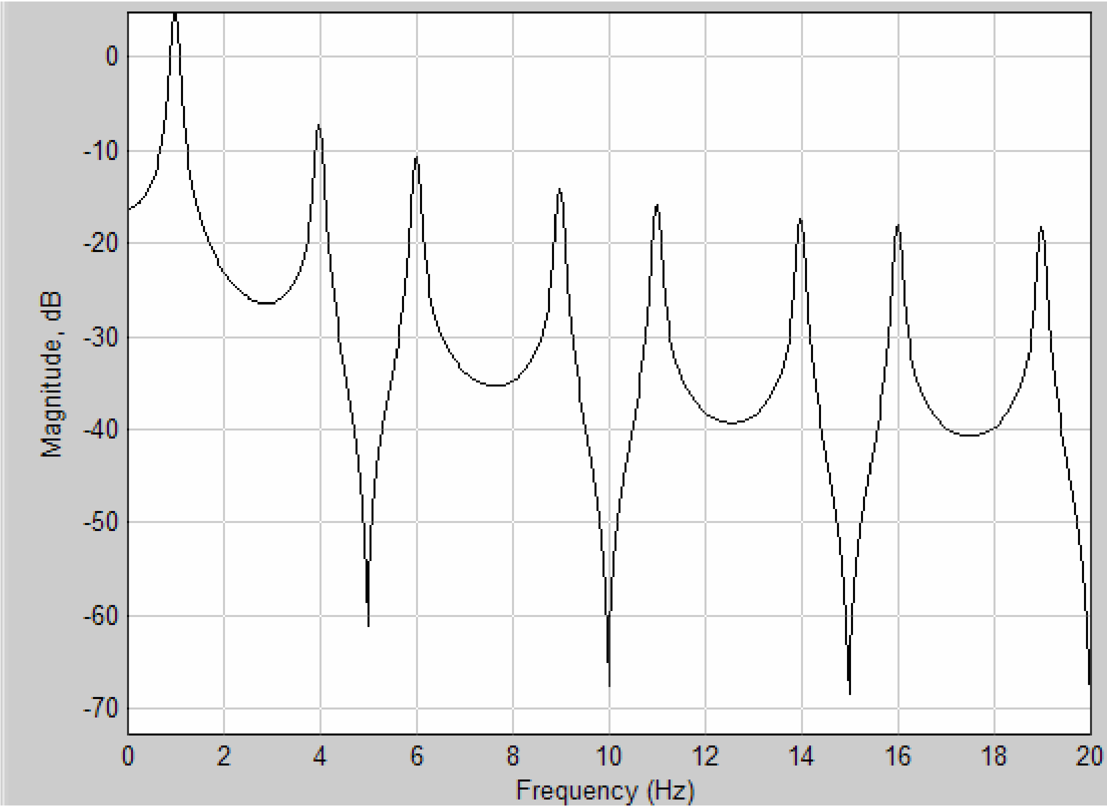


Abbildung 3: Frequenzbereich abgetastetes Signal; wiederholte Signalfrequenzen um die (hier nicht sichtbaren) Diracimpulse bei 5, 10, 15,… Hz gut erkennbar (vgl. Kapitel Hintergrund in der Einleitung).

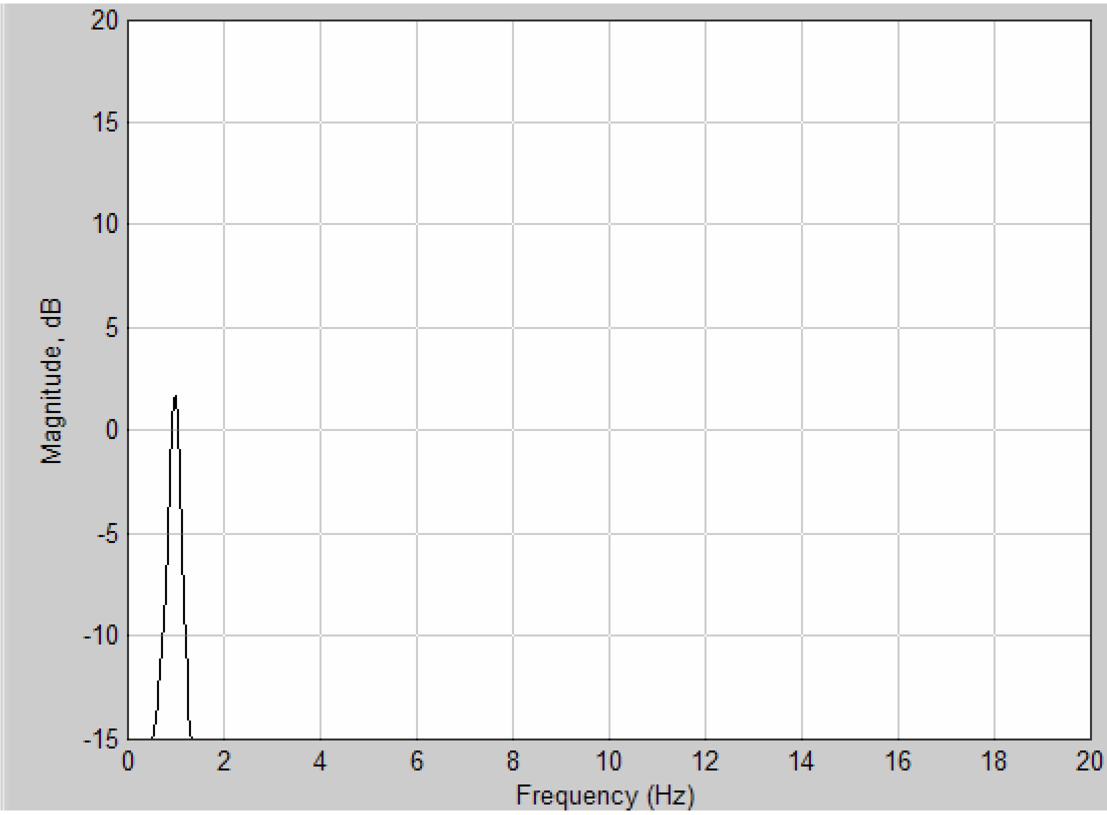


Abbildung 4: Frequenzbereich gefiltertes Signal; die Amplitude ist kleiner als die des ursprünglichen Signals, da keine „echten" Diracimpulse (weder unendlich dünn noch unendlich hoch) verwendet wurden.

2.2 Abtasttheorem, Shannon-Grenze

In diesem Teil der Übung sollte die Abtastfrequenz so weit verringert werden, dass sie nur mehr knapp über 2Hz liegt. Wir haben 2,1Hz gewählt und die Grenzfrequenz des Filters auf 2,05Hz korrigiert.
Da die Diracimpluse im Frequenzbereich nun schon sehr nahe beeinanderliegen ist eine Filterung nur mehr unzufriedenstellend möglich. Die nahe aneinanderliegenden Frequenzen, die nicht mehr komplett gefiltert werden können, sorgen für einen Schwebungseffekt im gefilterten Signal.

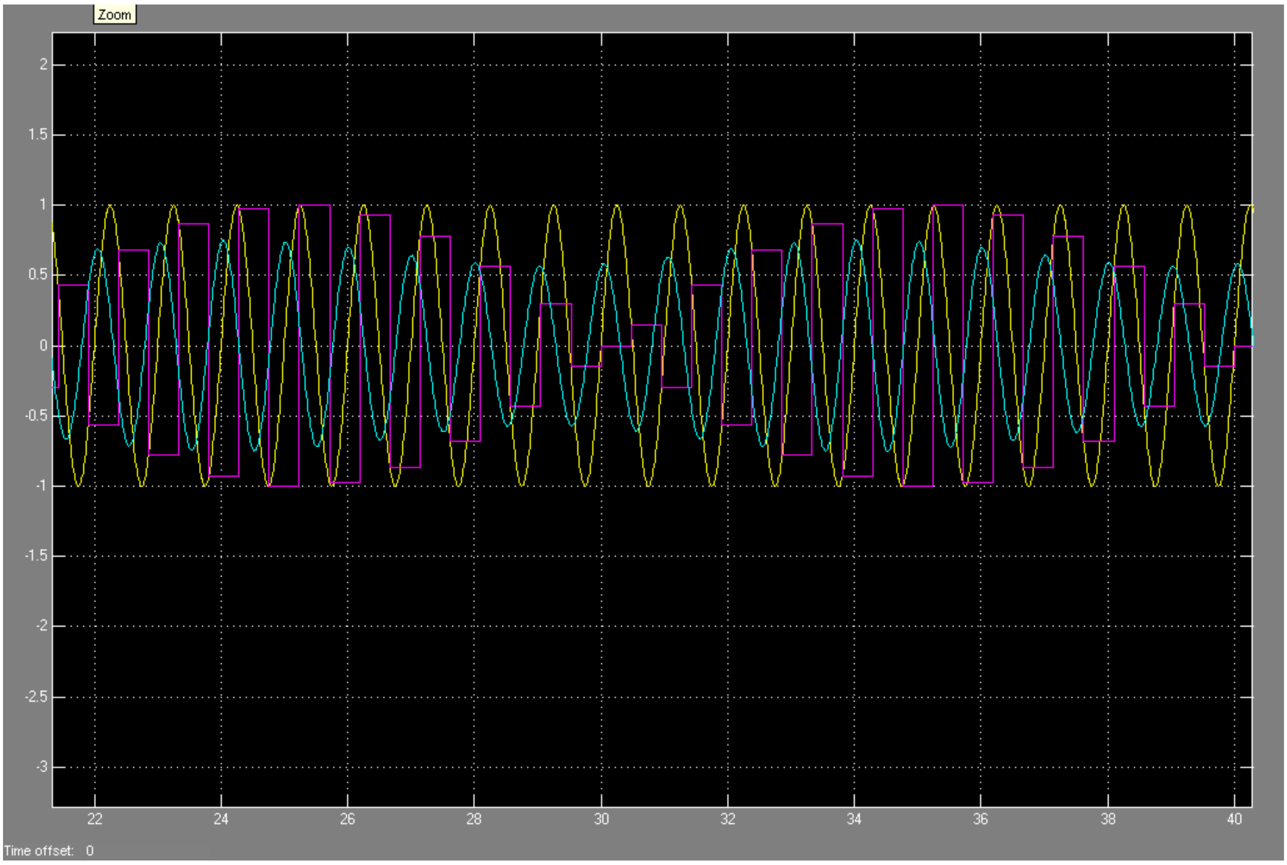


Abbildung 1: Zeitbereich (grün = ursprüngliches Signal, violett = abgetastetes Signal, hellblau = rückgewonnenes Signal). Durch die nahe nebeneinander liegenden Frequenzen ist eine Filterung nur mehr eingeschränkt möglich.

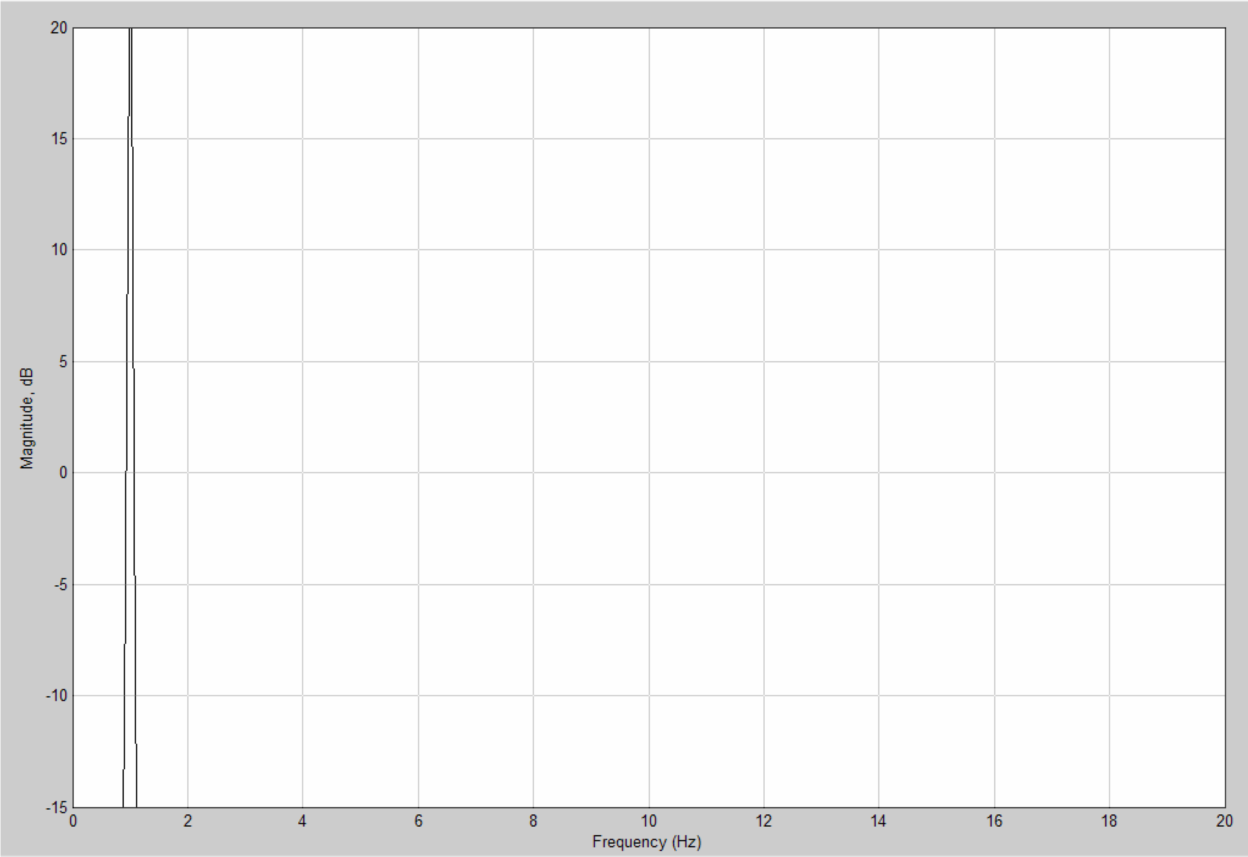


Abbildung 2: Frequenzbereich ursprüngliches Signal; Frequenz von 1Hz gut erkennbar

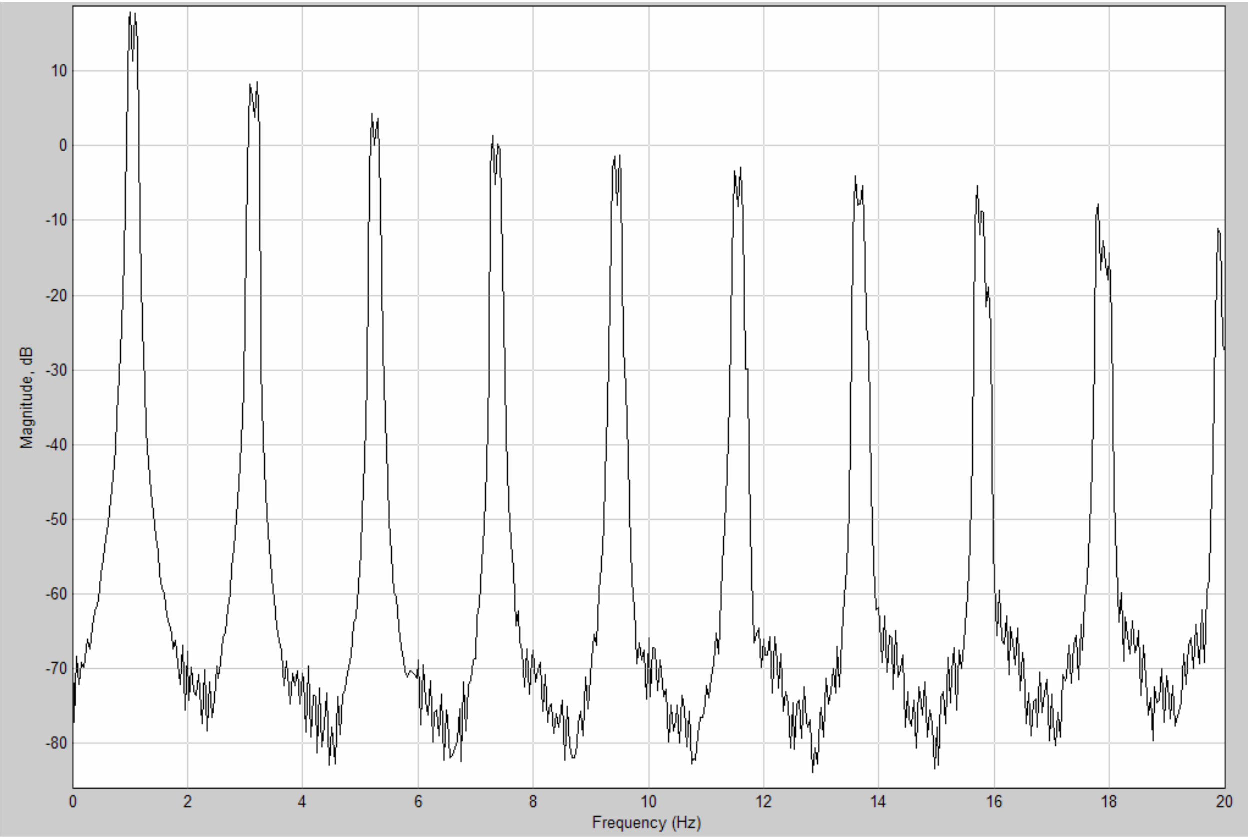


Abbildung 3: Frequenzbereich abgetastetes Signal; nahe aneinanderliegende Spitzen (2 Peaks) sichtbar → Filterung nicht mehr zu 100% möglich

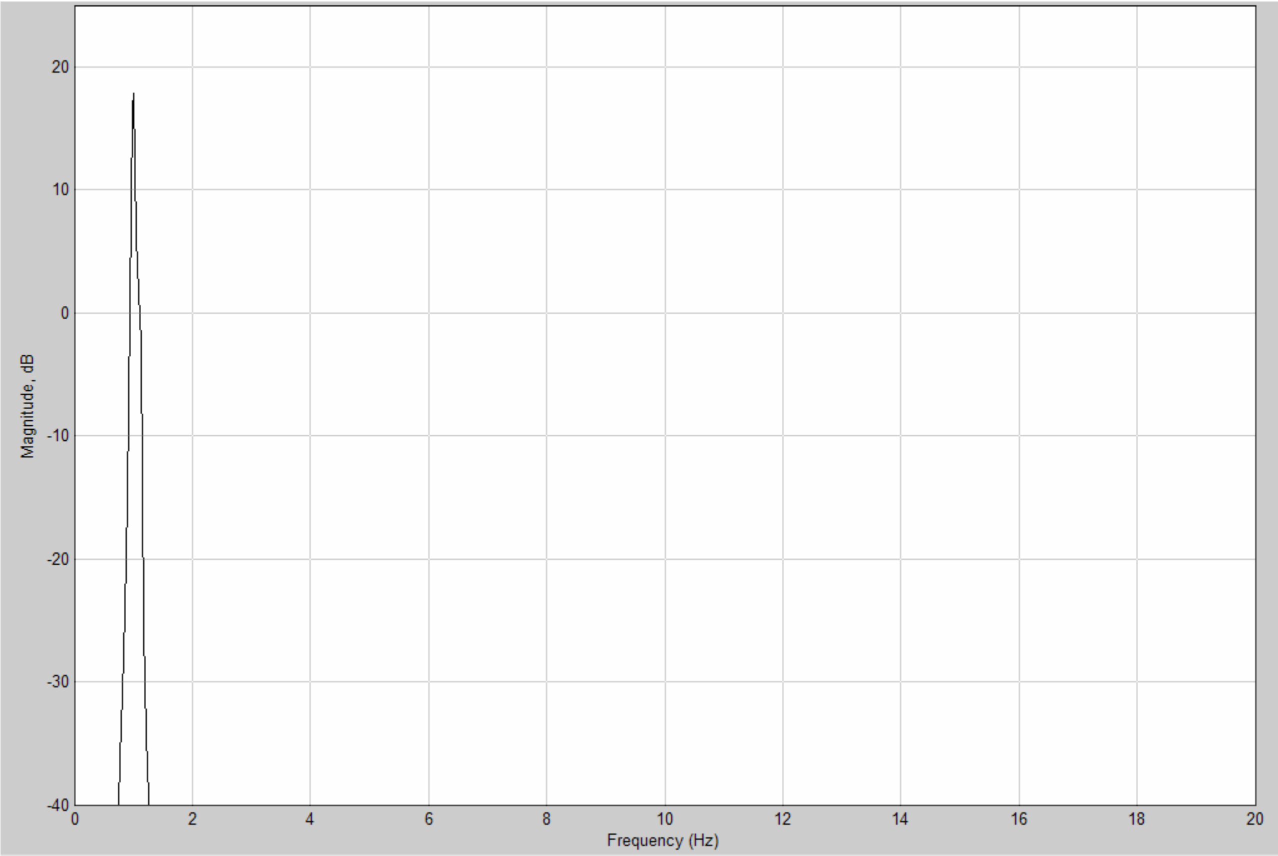


Abbildung 4: Frequenzbereich gefiltertes Signal: 2 Peaks bei 1Hz und 1,05Hz (ca., leider im Bild sehr schlecht erkennbar) → Filterung nicht mehr möglich

Abtasten unterhalb der Mindestfrequenz (2Hz)

Zu guter letzt wurde die Abtastfrequenz auf 1,5Hz verringert und das Resultat beobachtet. Die Grenzfrequenz des Filters wurde auf 1,05Hz korrigiert.

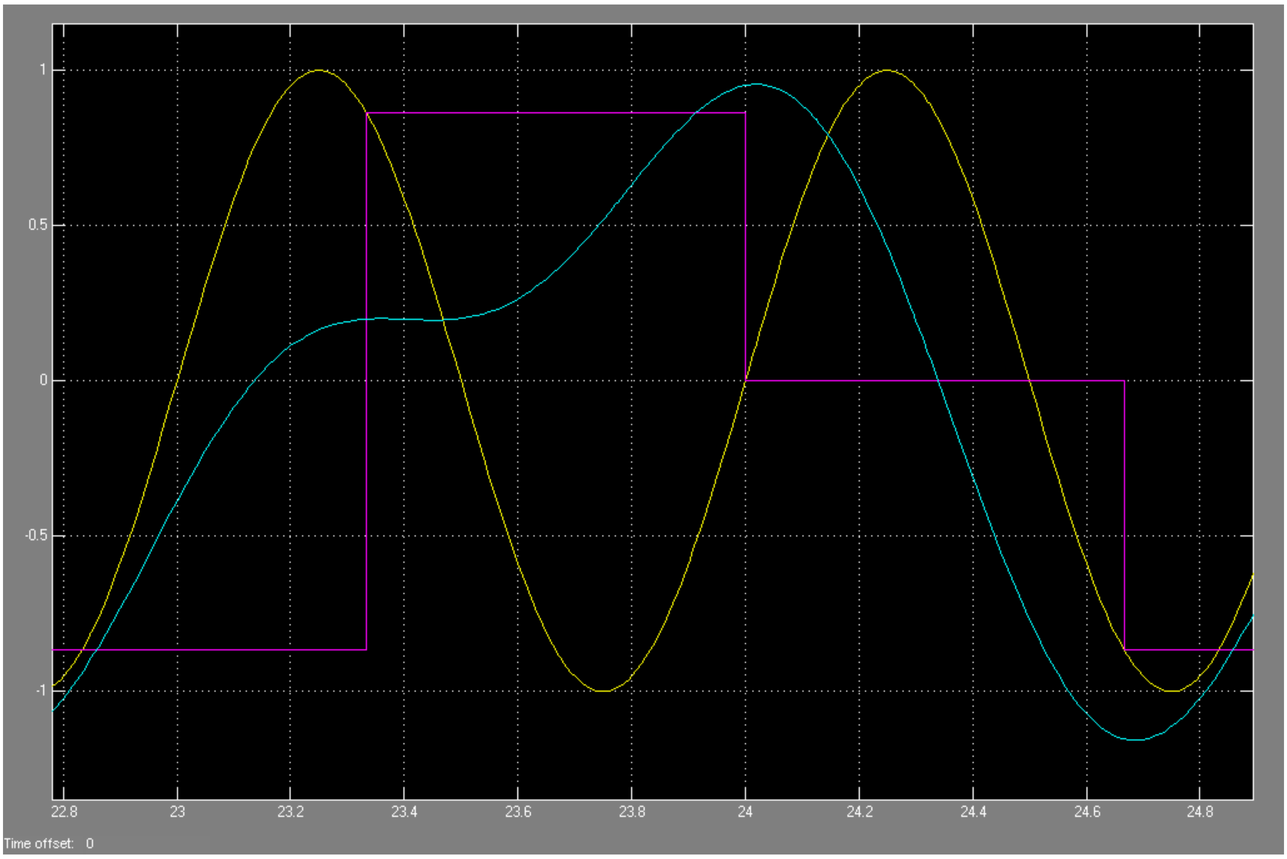


Abbildung 1: Zeitbereich (grün = ursprüngliches Signal, violett = abgetastetes Signal, hellblau = rückgewonnenes Signal). Durch die zu niedrig gewählte Abtastfrequenz ist das gefilterte Signal unbrauchbar (Wiederherstellung nicht möglich).

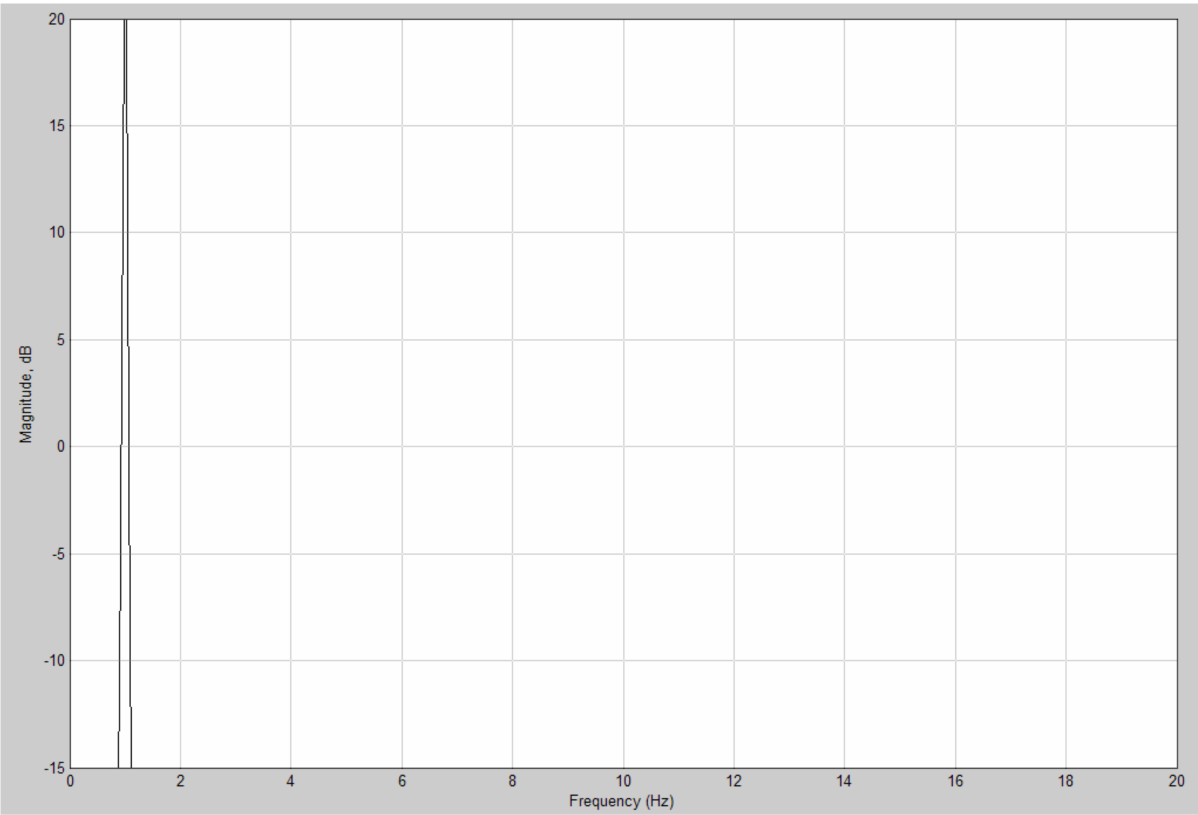


Abbildung 2: Frequenzbereich ursprüngliches Signal (1Hz-Peak)

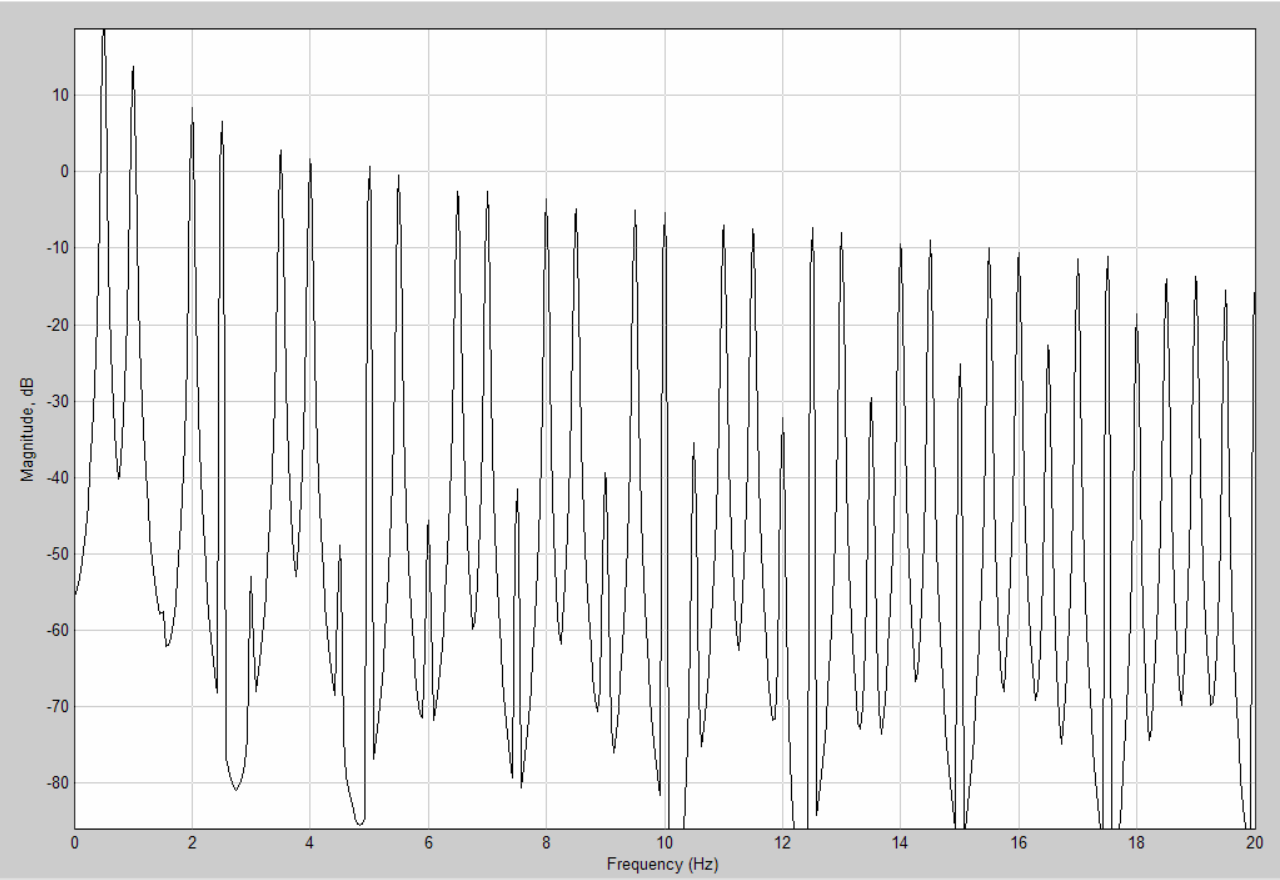


Abbildung 3: Frequenzbereich abgetastetes Signal; bereits bei 0,5Hz kommt die ursprüngliche Frequenz vor (zum Diracimpuls bei 1,5Hz gehörend). Da der Filter erst bei > 1Hz filtert, wird die Frequenz von 0,5Hz „mitgenommen" und kann nicht mehr gefiltert werden

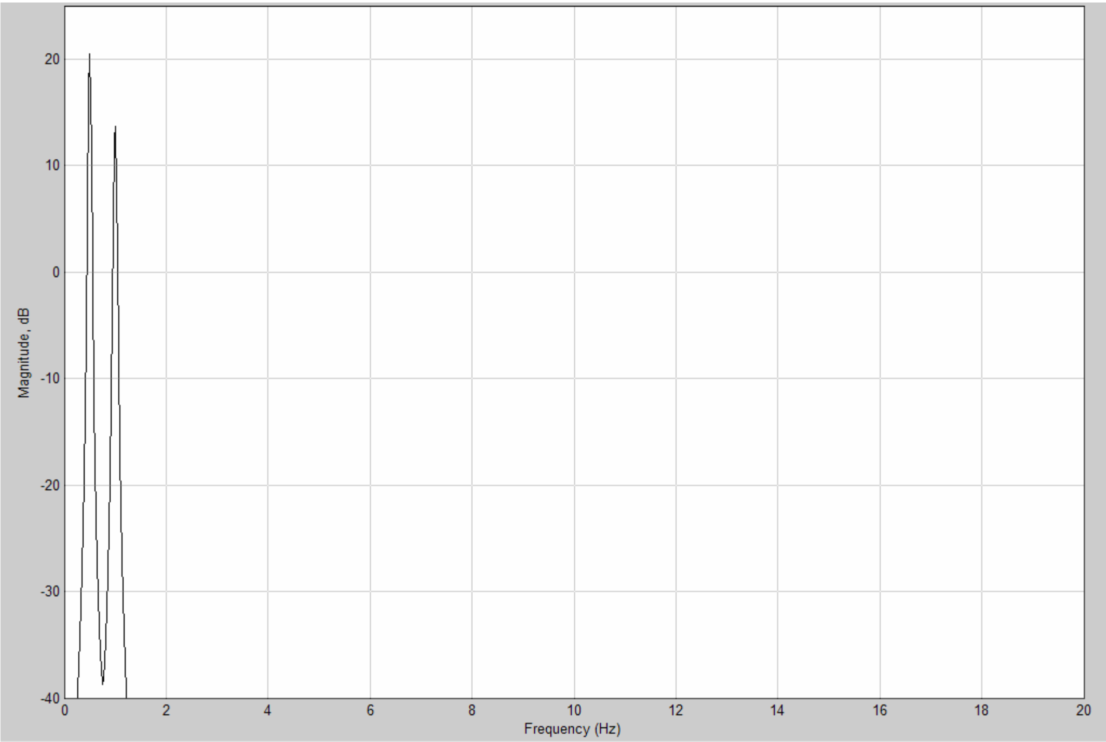


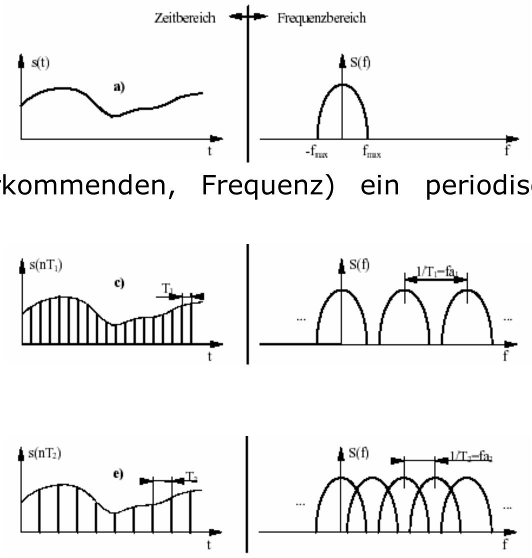
Abbildung 4: Frequenzen 0,5 und 1Hz im gefilterten Signal → unbrauchbar

Erkenntnis

Aus dieser Übung geht hervor, dass die Abtastfrequenz eines Signals mindestens dem doppelten der höchsten im Signal vorkommenden Frequenz entsprechen muss, um das Signal aus den Abtastwerten wieder rückgewinnen zu können.
Wird die Abtastfrequenz zu gering gewählt, kann das Signal nicht wiederhergestellt werden, da die Diracimpulse im Frequenzspektrum so weit „zusammenrücken", dass sich neue Frequenzanteile (wie in 2.2, letzte Abbildung gezeigt) vor der eigentlichen Signalfrequenz ausbilden.
Ist die Abtastfreuquenz nicht sehr viel größer als $2*f_{max}$ (größte im Signal vorkommende Frequenz), treten Schwebungserscheinungen auf, sofern nicht sehr gute Filter verwendet werden.

Anhang:

Der Aliasing-Effekt



In jedem Signal kommen bestimmte Frequenzen vor (siehe Abb. a). Tastet man nun dieses Signal (z.B. Ton) ab, erhält man bei korrekter Abtastung (laut Shannon mit mindestens der doppelten, im Signal vorkommenden, Frequenz) ein periodisches Frequenzspektrum, welches sich alle $\frac{1}{T} = f_A$ wiederholt. (T ist der zeitliche Abstand zwischen den einzelnen Abtastimpulsen. Fa entspricht daher der Abtastfrequenz) (siehe Abb. c).
Das anfängliche Signal bekommt man, wenn man nun einen Tiefpass-Filter über den Grund-Frequenzbereich legt, und somit alle weiteren Perioden des Frequenzsspektrums entfernt.

Ist die Abtastfrequenz nun nicht ausreichend groß (siehe Abb. e), so überlappen sich die einzelnen Perioden, so entstehen zusätzliche Frequenzen im Grund-Frequenzbereich, die sich auch im Nachhinein nicht mehr wegfiltern lassen. Dies nennt man den Aliasing Effekt. Bei Audiosignalen erkennt man meist eine unangenehme Verzerrung der Töne.

Natürlich wäre oben genanntes kein Problem, da eine ausreichend hohe Abtastfrequenz scheinbar das Problem löst. Oft ist jedoch der Tiefpass-Filter das Problem, denn seine Flanke reicht manchmal in die nächste Periode der Frequenz, und NOCH höhere Abtastfrequenzen würden ein zu hohes Datenaufkommen bedeuten.

Aus diesem Grund wird der sogenannte Anti-Aliasing Filter angewandt.

Anti-Aliasing (AA)

Um die Probleme zu vermeiden, die durch Aliasing enststehen (z.B.: „eckige" Kanten in Bildern oder verzerrte Töne („Geisterfrequenzen", neue Frequenzen, die vorher noch nicht da waren)) ist man dazu übergegangen, einen Filter bereits vor der Abtastung einzusetzen, und nicht unbedingt benötigte hohe Frequenzen wegzufiltern. Dadurch muss die Abtastfrequenz nicht erhöht werden, und das Abgetastete Frequenzspektrum kann wie gewünscht gefiltert werden. Natürlich hat das Anti-Aliasing auch unangenehme Nebeneffekte. Bei Audiosignalen wird der Klangumfang und dadurch die Qualität gemindert (eigentlich erst in Konzertsälen oder mit sehr hochwertigen Lautsprechern hörbar) und bei Bildern tritt ein Unschärfe-Effekt auf. Natürlich haben Hersteller z.B. modernen Grafikkarten eigene Lösungen für ebendieses Problem. Grundsätzlich bedeuten hohe Frequenzen in Bildern z.B. den Übergang einer hellen Linie auf einen dunklen Hintergrund. Das Anti-Aliasing ist hier auch als Kantenglättung bekannt.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass das im Labor durchgeführte Abtasten durchaus einen Praxisbezug hat, und auch noch sehr viel Raum für Entwicklungen offen lässt.