

# Affine Koordinatentransformationen – eine Zusammenfassung ausgewählter Aspekte

Andreas Unterweger, FH Salzburg

4. September 2014

**Inhalt:** Dieses Skriptum fasst einige relevante Aspekte zum Thema „Affine Koordinatentransformationen“ aus dem Stoffgebiet der Matrizenrechnung bzw. der Computergrafik zusammen. Es erhebt nicht den Anspruch, vollständig zu sein und soll kein Ersatz für eine Vorlesungs- oder Übungsmitschrift sein. Sollten Sie Fehler finden oder Verbesserungsvorschläge für dieses Skriptum haben, so schicken Sie diese bitte per Email an [aunterweger.tks2004@fh-salzburg.ac.at](mailto:aunterweger.tks2004@fh-salzburg.ac.at).

## Allgemeines zu Koordinatentransformationen

Koordinatentransformationen erlauben es, geometrische Objekte (Punkte, Kreise, Rechtecke etc.) und Funktionen in ihrer Position relativ zu einem gegebenen Koordinatensystem zu verändern. Bei der Transformation kann dabei entweder das Koordinatensystem oder das geometrische Objekt selbst in seiner Position verändert werden. Genaueres zu dieser Unterscheidung ist im nachfolgenden Abschnitt zu finden.

Im Folgenden werden die unten stehenden Arten der affinen (d.h. Seitenverhältnis- und parallelitätserhaltenden) Positionsveränderung im zwei- und dreidimensionalen Raum (konkret im  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ ), jeweils in kartesischen Koordinaten, behandelt:

- Spiegelung (d.h. die Reflexion an einem Punkt, einer Gerade oder Ebene)
- Rotation (d.h. die Drehung um einen Punkt oder eine Achse)
- Translation (d.h. die Parallelverschiebung um einen Vektor)
- Skalierung (d.h. die Vergrößerung bzw. Verkleinerung um einen Skalar)

Alle dreidimensionalen Koordinatensysteme werden dabei als **rechtshändig** (sich im Uhrzeigersinn (d.h. rechts-)drehend) angenommen, d.h. die x- und die y-Achse verlaufen auf dem Papier horizontal nach rechts bzw. vertikal nach oben, während die z-Achse aus der Oberfläche des Papiers herauskäme, so ihr das möglich wäre.

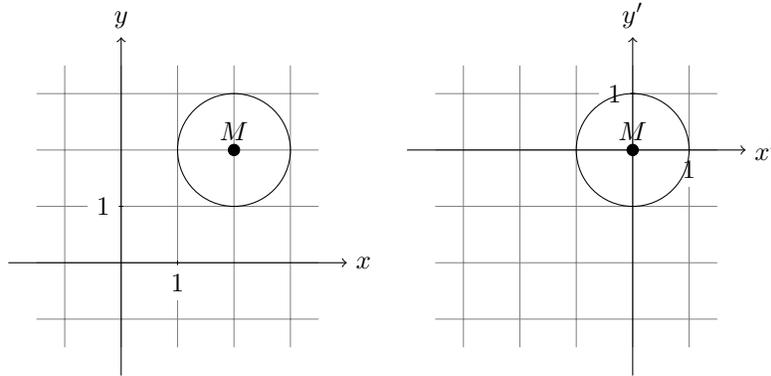


Abbildung 1: Aktive Koordinatentransformation: Das Koordinatensystem (links: vorher) wird so verschoben, dass sein Ursprung im Kreismittelpunkt  $M$  liegt (rechts: nachher)

## Unterscheidung aktive/passive Transformationen

Bei einer **aktiven** Transformation wird das Koordinatensystem in seiner Position verändert, während das geometrische Objekt seine Position beibehält. Die Koordinaten des Objektes relativ zum neuen, d.h. des in seiner Position veränderten, Koordinatensystems hängen von der Positionsveränderung des Koordinatensystems ab und sind (im Regelfall) von den alten verschieden. Bei einer **passiven** Transformation hingegen wird das geometrische Objekt in seiner Position verändert, während das Koordinatensystem seine Position beibehält. Die Koordinaten des Objektes ändern sich dabei zwar im Regelfall, beziehen sich jedoch auch nach der Transformation auf dasselbe Koordinatensystem.

Es gilt zu beachten, dass beispielsweise in der Physik die Bedeutung von „aktiv“ und „passiv“ im Transformationskontext vertauscht vorkommt, da ebenda Bewegungen meist auf Objekte anstatt (wie in diesem Skriptum) auf deren Koordinatensystem bezogen werden.

Abbildung 1 zeigt eine aktive Transformation, Abbildung 2 eine passive. Im aktiven Fall wird das Koordinatensystem derart verschoben, dass sein Ursprung mit dem Mittelpunkt des dargestellten Kreises zusammenfällt, während im passiven Fall der Kreis derart verschoben wird, dass selbiges zutrifft.

Die Transformation eines geometrischen Objektes kann dabei auch als Transformation jedes einzelnen seiner Punkte betrachtet werden. In den nächsten Abschnitten werden daher lediglich Transformationen einzelner Punkte behandelt, ohne dabei die Übertragbarkeit auf geometrischen Objekte im Allgemeinen zu verlieren. Jene Objekte, die sich mittels Gleichungen beschreiben lassen, werden im Abschnitt „Gleichungstransformationen“ gesondert behandelt.

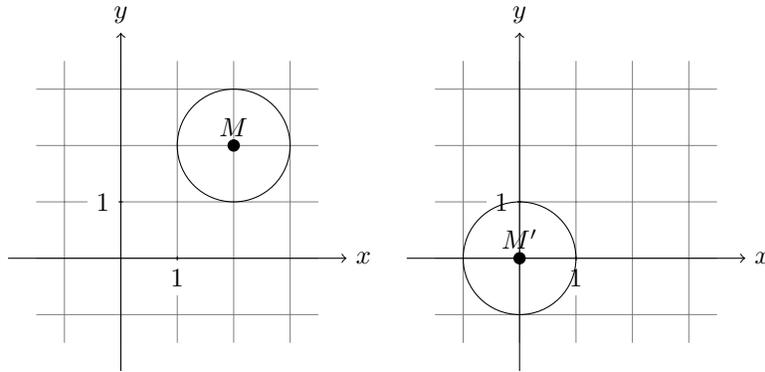


Abbildung 2: Passive Koordinatentransformation: Der Kreis (links: vorher) wird so verschoben, dass sein Mittelpunkt  $M$  im Ursprung des Koordinatensystems liegt (rechts: nachher)

## Transformationen über Matrizen

Die in diesem Skriptum behandelten Transformationen lassen sich allesamt als Matrix anschreiben, deren Multiplikation mit einem gegebenen Punkt dessen neue Koordinaten liefert. Die Matrix gibt dabei an, wie die neuen Koordinaten von den alten abhängen. Das folgende Beispiel soll das anhand der passiven Spiegelung (Details hierzu im Abschnitt „Spiegelungen“) des in Abbildung 3 dargestellten Punktes an der  $x$ -Achse verdeutlichen.

Wie deutlich zu erkennen ist, invertiert eine Spiegelung an der  $x$ -Achse das Vorzeichen der  $y$ -Koordinate, während die  $x$ -Koordinate unverändert bleibt. Anhand des Beispielpunktes  $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ , der durch die Spiegelung zum Punkt  $P' = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$  wird, lässt sich dieser Zusammenhang zwischen den alten  $x$ -/ $y$ -Koordinaten  $x$  und  $y$  und den neuen  $x'$  und  $y'$  wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \end{aligned}$$

Allgemeiner kann man auch schreiben

$$\begin{aligned} x' &= 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' &= 0 \cdot x - 1 \cdot y \end{aligned}$$

Die neuen Koordinaten  $x'$  und  $y'$  hängen also jeweils von den beiden alten Koordinaten  $x$  und  $y$  ab. Fasst man die beiden Gleichungen zusammen, kann man auch schreiben:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

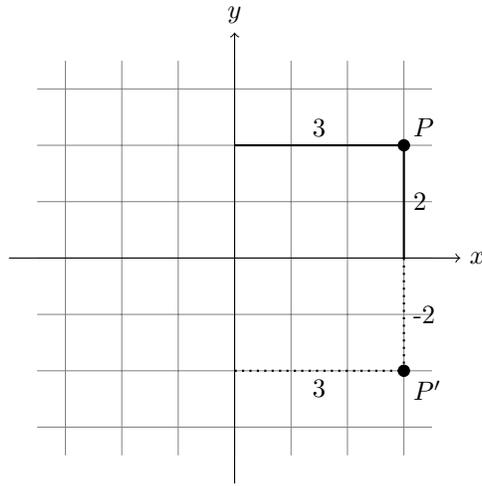


Abbildung 3: Koordinatenabhängigkeit bei einer passiven Spiegelung an der x-Achse. Der Punkt  $P$  wird zu  $P'$  gespiegelt, indem das Vorzeichen seiner y-Koordinate invertiert wird

Es gilt also

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot P$$

Die Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  transformiert also den Punkt  $P$  zu  $P'$ . Nennt man diese Matrix  $S_x$  (zur Spiegelung an der  $\mathbf{x}$ -Achse), so kann man schreiben

$$P' = S_x \cdot P$$

Allgemein kann für einen Punkt  $X$  und eine Transformationsmatrix  $T$  geschrieben werden

$$X' = T \cdot X$$

$X'$  ist dann der durch  $T$  transformierte Punkt  $X$ . Existiert  $T^{-1}$  (d.h. ist  $T$  regulär), so gibt es eine Rücktransformation  $T^{-1}$ , die  $X'$  zu  $X$  rücktransformiert:

$$X = T^{-1} \cdot X' = T^{-1} \cdot \underbrace{(T \cdot X)}_{X'} = \underbrace{(T^{-1} \cdot T)}_E \cdot X = X$$

Für das obige Beispiel gilt  $S_x^{-1} = S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , d.h.

$$P = S_x^{-1} \cdot P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = P$$

Dass  $S_x^{-1} = S_x$  gelten muss, ist einsichtig, da auch bei der Rücktransformation lediglich das Vorzeichen der y-Koordinate invertiert wird und die x-Koordinate unverändert bleibt. Hin- und Rücktransformation führen also im Falle von  $S_x$  die gleiche Veränderung aus.

In den folgenden Abschnitten werden Matrizen für alle eingangs angeführten Transformationsarten mitsamt deren Eigenschaften und Herleitung beschrieben. Eine Zusammenfassung dieser Matrizen und ihrer Eigenschaften ist im Anhang „Matrizenübersicht“ zu finden.

## Spiegelungen

Bei einer Spiegelung findet eine Reflexion an einem Punkt, einer Gerade oder einer Ebene statt, d.h. das zu spiegelnde Objekt wird vom „Spiegel“ an eine Stelle reflektiert, die die gleiche Entfernung  $d_g$  vom Spiegel hat wie das Original. Zusätzlich schließt die gedachte Linie, die das Original und dessen Spiegelung verbindet, einen rechten Winkel mit der Spiegel-„Oberfläche“ ein (vgl. Abbildung 4), sodass eine Spiegelung immer eindeutig definiert ist.

Spiegelungen an Punkten werden in diesem Skriptum nicht explizit behandelt – es sei an dieser Stelle auf die Übungen verwiesen. Bei Spiegelungen an Geraden bestimmt der Winkel, den dieselben mit der x-Achse einschließen (vgl. Abbildung 4), die Koeffizienten der Spiegelungsmatrix. Im dreidimensionalen Fall, d.h. bei der Spiegelung an einer Ebene, bestimmt der Normalvektor derselben die Koeffizienten der Spiegelungsmatrix.

Dreidimensionale Spiegelungen an Ebenen (d.h. an einer beliebig liegenden Spiegelfläche) kann man sich mit etwas Fantasie wie die Reflexion durch einen perfekten Spiegel (d.h. unendlich ausgedehnt und dünn) in der realen Welt vorstellen – die Spiegelung entspricht dem, was ein Betrachter im Spiegel sieht.

Da es im dreidimensionalen Fall immer Punkte geben muss, die exakt auf der Spiegelfläche liegen, d.h. durch die Spiegelung selbst in ihrer Position nicht verändert werden, müssen dreidimensionale Spiegelungsmatrizen in jedem Fall den zweifachen Eigenwert 1 haben, wobei die dazugehörigen Eigenvektoren exakt die Spiegelungsebene aufspannen. Selbiges gilt im zweidimensionalen Fall für den Richtungsvektor der Spiegelungsgeraden zum einfachen Eigenwert 1.

Außerdem müssen sowohl zwei- als auch dreidimensionale Spiegelungsmatrizen den einfachen Eigenwert -1 haben, zu dem jeweils ein Eigenvektor gehört, der im zweidimensionalen Fall senkrecht zur Spiegelungsgerade steht und ebenfalls durch den Ursprung verläuft bzw. der im dreidimensionalen Fall jene Achse beschreibt, die normal auf die Spiegelungsebene steht. Zudem hat jede Spiegelungsmatrix die Determinante -1.

Die Spiegelungsmatrizen für die aktive Spiegelung sind mit jenen der passiven Spiegelung ident. Für den dreidimensionalen Fall in der realen Welt veranschaulicht macht es keinen Unterschied, ob der Betrachter vor dem Spiegel sein Spiegelbild ansieht oder ob er selbst im Spiegel steht und die „Außenwelt“ (d.h. die vormals ungespiegelte) betrachtet. Zum besseren Verständnis dieses Zusammenhangs sei an dieser Stelle unkonventionellerweise auf das Ende des Filmes

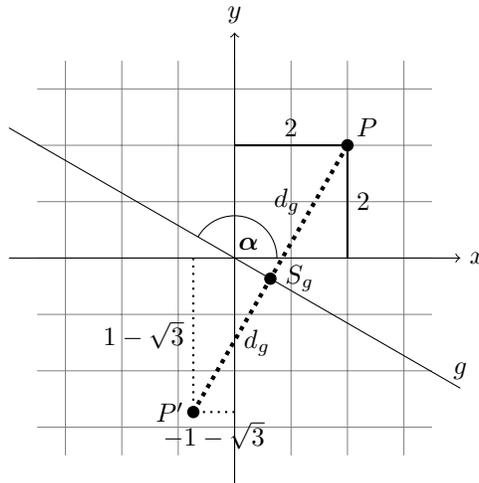


Abbildung 4: Spiegelung im  $\mathbb{R}^2$ : Passive Reflexion von  $P$  an der Geraden  $g$  zu  $P'$ .  $g$  schließt mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\alpha = 150^\circ$  ein, der Abstand  $d_g$  von  $P$  zum Spiegelungspunkt  $S_g$  auf  $g$  ist identisch mit dem Abstand von  $P'$  zum selben

„Mirrors“ (2008) verwiesen.

## Spiegelungsmatrizen

Die Matrix zur aktiven **und** passiven Spiegelung an einer (durch den Ursprung gehenden) Gerade, die im  $\mathbb{R}^2$  den Winkel  $\alpha$  mit der  $x$ -Achse einschließt, lautet (ihre Herleitung befindet sich im Anhang „Herleitung der Spiegelungsmatrix im  $\mathbb{R}^2$ “)

$$S_{2D}(\alpha) = S_{2D}^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

Beispielhaft soll die Gültigkeit dieser Matrix für das obige Beispiel des an  $g$  (mit  $\alpha = 150^\circ$ ) gespiegelten Punktes  $P$  gezeigt werden:

$$P' = S_{2D}(\alpha = 150^\circ) \cdot P = \begin{pmatrix} \cos(300^\circ) & \sin(300^\circ) \\ \sin(300^\circ) & -\cos(300^\circ) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} \\ -1 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Der Vollständigkeit halber sei daran erinnert, dass der (Steigungs-)Winkel  $\alpha$  aus der Steigung der Geraden berechnet werden kann. Wenn  $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , dann gilt (unter Berücksichtigung der  **$\pi$ -Periodizität des Tangens**)

$$\alpha = \arctan(k) = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

bzw. umgekehrt

$$k = \tan(\alpha)$$

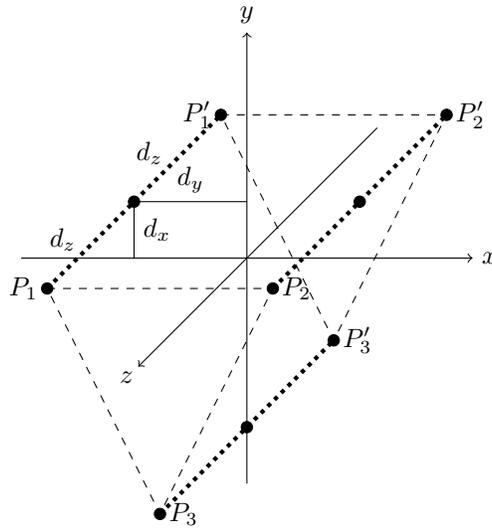


Abbildung 5: Spiegelung im  $\mathbb{R}^3$ : Reflexion dreier Punkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  an der x-y-Ebene zu  $P'_1$ ,  $P'_2$  und  $P'_3$ . Die z-Koordinate  $d_z$  aller Punkte wird invertiert, während die x-Koordinate  $d_x$  und die y-Koordinate  $d_y$  gleich bleiben

Geht die Spiegelungsgeraden nicht durch den Ursprung, erfolgt die Transformation wie folgt: zuerst wird das Koordinatensystem aktiv um  $d$  (die x-Koordinate des Schnittpunktes der Gerade mit der y-Achse) parallelverschoben (siehe Abschnitt „Translationen“). Hernach wird in den neuen Koordinaten die Spiegelung wie in diesem Abschnitt beschrieben durchgeführt und das Koordinatensystem zuletzt aktiv in seine vorherige Position zurückverschoben. Details zur Hintereinanderausführung von Koordinatentransformationen sind im entsprechenden Abschnitt unten zu finden.

Als Beispiel für eine Spiegelungsmatrix im  $\mathbb{R}^3$  soll der Einfachheit halber die Spiegelung an einer von zwei Koordinatenachsen aufgespannten Ebene angegeben werden. Die x-y-Ebene, deren z-Koordinate 0 ist, invertiert die z-Koordinate jedes gespiegelten Punktes, ohne dabei die x- oder die y-Koordinate zu verändern (vgl. Abbildung 5). Es gilt also folgender Zusammenhang zwischen den neuen Koordinaten  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$  und den alten  $x$ ,  $y$  und  $z$  jedes Punktes:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= -z \end{aligned}$$

Daraus kann die Matrix zur Spiegelung an der x-y-Ebene gefolgert werden, dass

$$S_{3D_{xy}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Analog lassen sich die Matrizen zur Spiegelung an der x-z- und an der y-z-Ebene als

$$S_{3D_{xz}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$S_{3D_{yz}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

angeben. Wie deutlich zu erkennen ist, bleiben jene Koordinaten durch die Spiegelungen unverändert, deren zugehörige Achsen die Spiegelungsebene aufspannen. Die dritte, übrig bleibende Koordinate wird invertiert.

Matrizen „gekippter“ Spiegelungsebenen, d.h. von Ebenen, die nicht von zwei Koordinatenachsen aufgespannt werden, können wie folgt ermittelt werden: zuerst wird das Koordinatensystem aktiv so gedreht (siehe Abschnitt „Rotationen“), dass die Spiegelungsebene mit einer von zwei Koordinatenachsen aufgespannten Ebene gleichauf liegt. Anschließend wird die Spiegelung – je nach Lage der Ebene – wie in diesem Abschnitt beschrieben durchgeführt und das Koordinatensystem zuletzt aktiv in seine vorige Position zurückgedreht. Details zur Hintereinanderausführung von Koordinatentransformationen sind im entsprechenden Abschnitt unten zu finden.

## Rotationen

Bei einer Rotation findet eine Drehung um einen Bezugspunkt oder eine Achse statt, wobei der Abstand aller Objekte im Koordinatensystem zum Bezugspunkt bzw. zur Achse durch die Transformation unverändert bleibt. In weiterer Folge wird explizit zwischen Rotationen um einen Bezugspunkt im  $\mathbb{R}^2$  und Rotationen um eine Achse im  $\mathbb{R}^3$  unterschieden – alle anderen Fälle werden außen vor gelassen.

### Rotationen um einen Bezugspunkt im $\mathbb{R}^2$

Wird ein Punkt im  $\mathbb{R}^2$  um den Ursprung gedreht, bleibt der Abstand zum Ursprung stets gleich. Unabhängig vom Drehwinkel  $\varphi$  bewegt sich also der Punkt  $P$  in Abbildung 6 auf einer gedachten (Kreis-)Linie um den Ursprung, die er nie verlässt (ähnlich der Bahn eines Planeten). Bei einer passiven Drehung von

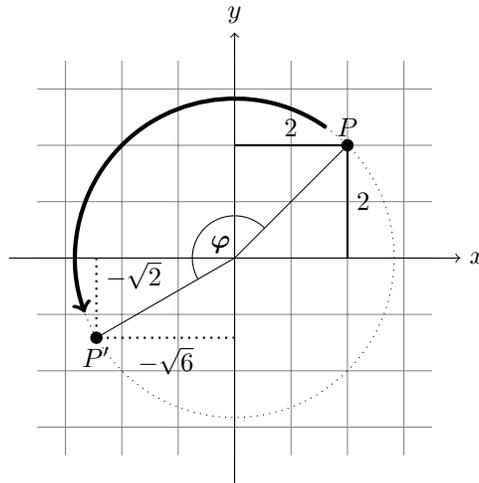


Abbildung 6: Rotation im  $\mathbb{R}^2$ : Passive Drehung des Punktes  $P$  um den Ursprung zu  $P'$ . Der Drehwinkel  $\varphi$  beträgt  $165^\circ$

$165^\circ$  um den Ursprung bewegt sich  $P$  also um  $165^\circ$  (**gegen** den Uhrzeigersinn) weiter.

Alternativ kann man sich  $P$  im  $\mathbb{R}^2$  auch als komplexe Zahl vorstellen, die mit  $e^{j\varphi}$  multipliziert wird, wodurch sie zwar vom Betrage her unverändert bleibt, während ihr Winkel um  $\varphi$  erhöht wird. Aus diesem Grund haben Rotationsmatrizen, deren Bezugspunkt der Ursprung ist, keine (reellen) Eigenwerte im  $\mathbb{R}^2$ , wohl aber im  $\mathbb{C}^2$ . Diese sind gerade  $e^{\pm j\varphi}$  – und zwar für jene Eigenvektoren, deren komplexe x-Komponente dem  $j$ -fachen ihrer y-Komponente bzw. umgekehrt entspricht. Zudem ist die Determinante aller Rotationsmatrizen 1.

Anstatt eine passive Drehung mit einem Drehwinkel von  $\varphi$  auszuführen kann auch eine aktive Drehung des Koordinatensystems mit dem negativen Winkel  $-\varphi$  ausgeführt werden – das Ergebnis ist für  $P$  in den neuen Koordinaten ident. Anschaulich kann man sich hierzu eine Spielfigur vorstellen, die sich in einer zweidimensionalen Spielewelt mit dem Kopf z.B. um  $30^\circ$  zu ihrer Rechten dreht und den Unterschied nicht merken würde, wenn sich stattdessen die Spielewelt um  $30^\circ$  zu ihrer Linken drehte.

Ist der Bezugspunkt der Rotation ein anderer als der Ursprung, erfolgt die Transformation wie folgt: zuerst wird das Koordinatensystem aktiv in den Bezugspunkt parallelverschoben (siehe Abschnitt „Translationen“). Hernach wird in den neuen Koordinaten die Rotation wie in diesem Abschnitt beschrieben durchgeführt und das Koordinatensystem zuletzt aktiv in seinen ehemaligen Ursprung zurückverschoben. Details zur Hintereinanderausführung von Koordinatentransformationen sind im entsprechenden Abschnitt unten zu finden.

## Rotationsmatrizen für den $\mathbb{R}^2$

Die Matrix zur passiven Rotation um den Ursprung mit dem Winkel  $\varphi$  im  $\mathbb{R}^2$  lautet (ihre Herleitung befindet sich im Anhang „Herleitung der passiven Rotationsmatrix im  $\mathbb{R}^2$ “)

$$R_{2D}^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Beispielhaft soll die Gültigkeit dieser Matrix für das obige Beispiel des  $165^\circ$  um den Ursprung gedrehten Punktes  $P$  gezeigt werden:

$$P' = R_{2D}^{-1}(\varphi = 165^\circ) \cdot P = \begin{pmatrix} \cos(165^\circ) & -\sin(165^\circ) \\ \sin(165^\circ) & \cos(165^\circ) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Die Matrix zur aktiven Rotation lautet

$$R_{2D}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Dies kann aus der obigen Überlegung zur entgegengesetzten aktiven Rotation des Koordinatensystems gefolgert werden:

$$R_{2D}(\varphi) = R_{2D}^{-1}(-\varphi)$$

Da der Sinus eine ungerade und der Cosinus eine gerade Funktion ist, folgt aus der Umformung die Gültigkeit der Matrix zur aktiven Rotation:

$$R_{2D}^{-1}(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & +\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = R_{2D}(\varphi)$$

## Rotationen um eine Achse im $\mathbb{R}^3$

Wird ein Punkt im  $\mathbb{R}^3$  passiv um eine der Koordinatenachsen rotiert (oder das Koordinatensystem aktiv um die Achse in Gegenrichtung gedreht), spricht man auch von einer Achsentransformation. Im Folgenden soll die passive Rotation um die z-Achse als Beispiel einer Achsentransformation erläutert und anschließend auf die anderen Koordinatenachsen erweitert werden.

Da die z-Achse der Normalvektor der x-y-Ebene ist, wird die z-Koordinate bei einer Rotation um die z-Achse nicht verändert. Dies kann auch anhand der gedachten (Kreis-)Linie (vgl. Abschnitt zu  $\mathbb{R}^2$ ) mit Mittelpunkt  $M_R$  auf der Koordinatenachse, um die rotiert wird, nachvollzogen werden. Die (Kreis-)Linie liegt auf einer Ebene parallel zur x-y-Ebene, wie in Abbildung 7 dargestellt.

Daraus folgend kann – unter zusätzlicher Verwendung der Rotationsmatrizen aus dem  $\mathbb{R}^2$  – der Zusammenhang zwischen den neuen Koordinaten  $x'$  und  $y'$  eines mit dem Winkel  $\varphi$  um die z-Achse rotierten Punktes und dessen alten

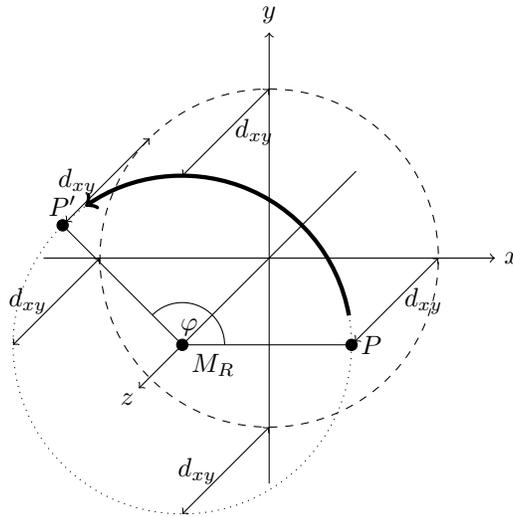


Abbildung 7: Rotation im  $\mathbb{R}^3$ : Passive Drehung des Punktes  $P$  um die  $z$ -Achse zu  $P'$ . Der Drehwinkel  $\varphi$  beträgt  $135^\circ$ , die  $z$ -Koordinaten beider Punkte sind gleich, da die gedachte (Kreis-)Linie der Drehung parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene liegt und zu dieser den Abstand  $d_{xy}$  hat

hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos(\varphi) - y \cdot \sin(\varphi) \\ y' &= x \cdot \sin(\varphi) + y \cdot \cos(\varphi) \\ z' &= z \end{aligned}$$

Da sich die  $z$ -Koordinate nicht ändert und auch keinen Einfluss auf  $x'$  und  $y'$  hat, kann eine Rotation um die  $z$ -Achse (wie auch die anderen Achsentransformationen) übertrageneweise als zweidimensionale Rotation in homogenen Koordinaten (vgl. entsprechender Abschnitt unten) betrachtet werden.

Die Koordinatenabhängigkeiten für die Rotation um die  $x$ - bzw.  $y$ -Achse lassen sich dann durch zyklisches Vertauschen von  $x$  zu  $y$ ,  $y$  zu  $z$  und  $z$  zu  $x$  bzw.  $x$  zu  $z$ ,  $y$  zu  $x$  und  $z$  zu  $y$  (und analog für  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$ ) als Rotation um die  $z$ -Achse mit anschließender Rückvertauschung darstellen. Die dazugehörigen Matrizen sind im folgenden Abschnitt aufgelistet, während eine genauere Erläuterung der Gültigkeit und des Ergebnisses des zyklischen Vertauschens ist im Anhang „Herleitung der weiteren Rotationszusammenhänge im  $\mathbb{R}^3$ “ zu finden ist.

Im allgemeinen Fall einer beliebig gelegenen Rotationsachse kann wie folgt vorgegangen werden: Zuerst wird das Koordinatensystem mittels einer Translation  $T$  aktiv so positioniert, dass die Rotationsachse durch den Koordinatenursprung verläuft. Anschließend wird das Koordinatensystem mittels zweier Achsenrotationen  $R_1 \cdot R_2$  aktiv so gedreht, dass die Rotationsachse auf einer der Achsen

des Koordinatensystems liegt, um die eigentliche Rotation als Achsenrotation durchführen zu können. Abschließend muss das Koordinatensystem durch  $R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$  und  $T^{-1}$  aktiv rücktransformiert werden.

Verläuft die Rotationsachse durch den Koordinatenursprung, entfallen die beiden Translationsschritte  $T$  und  $T^{-1}$ . Liegt die Rotationsachse parallel zu einer der Koordinatenachsen, kann die gesamte Transformation ähnlich wie im zweidimensionalen Fall geschehen: Zuerst wird eine der Koordinatenachsen durch eine aktive Translation in die Rotationsachse verschoben, um anschließend die eigentliche Rotation als Achsenrotation durchführen zu können. Abschließend muss die aktive Rotation durch eine entsprechende Rücktransformation wieder rückgängig gemacht werden.

Allgemeine dreidimensionale Rotationsmatrizen haben zusätzlich zum Eigenwert  $e^{j\varphi}$  (wie im Zweidimensionalen) den Eigenwert 1, der daher rührt, dass auf der Rotationsachse liegende Punkte durch die Drehung in ihrer Position nicht verändert werden. Der Richtungsvektor der Rotationsachse lässt sich somit aus dem Eigenvektor der Drehmatrix zum Eigenwert 1 bestimmen.

## Rotationsmatrizen für den $\mathbb{R}^3$

Aus den Koordinatenabhängigkeiten im vorigen Abschnitt für eine passive Rotation um die z-Achse mit dem Winkel  $\varphi$  ergibt sich folgende Transformationsmatrix:

$$R_{3D_z}^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Analog ergeben sich die Matrizen für die Rotation um die x- bzw. die y-Achse zu

$$R_{3D_y}^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

bzw.

$$R_{3D_x}^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Die aktiven Rotationsmatrizen ergeben sich – analog zu jenen im  $\mathbb{R}^2$  – zu

$$R_{3D_z}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$R_{3D_y}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

und

$$R_{3D_x}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Für alle Rotationsmatrizen – zwei- wie dreidimensional – gilt immer  $R^{-1} = R^T$  bzw.  $R = (R^{-1})^{-1} = (R^T)^T = R$ , da  $R$  und  $R^{-1}$  orthogonal sind.

## Translationen

Bei einer Translation findet eine Parallelverschiebung statt, d.h. jede Koordinate eines Punktes wird (separat) um einen konstanten Wert erhöht oder verringert. Abbildung 8 zeigt das am Beispiel eines Punktes  $P$ , der um 5 nach rechts und

um 3 nach unten, d.h. um den Translationsvektor  $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$  verschoben, wird.

Selbiges kann erreicht werden, indem das Koordinatensystem aktiv in die Gegenrichtung, d.h. um 5 nach links und um 3 nach oben, verschoben wird.

Da bei einer Translation jede neue Koordinate um eine von den alten Koordinaten unabhängigen Wert erhöht bzw. verringert werden soll, ist leicht einsichtig, dass die Multiplikation des Punktes mit einer  $2 \cdot 2$ -Transformationmatrix für einen zweidimensionalen Punktes nicht ausreichend ist. Am einfachsten erkennbar ist das anhand des Punktes  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Möchte man diesen rein unter Zuhilfenahme seiner bisherigen Koordinaten nach rechts verschieben, so ist das nicht möglich, da dessen neue x-Koordinate (wie auch die y-Koordinate) – unabhängig von den Koeffizienten der Matrix – 0 wäre. Es bedarf in diesem Fall also einer zusätzlichen „künstlichen“ Dimension – beispielsweise durch so genannte homogene Koordinaten.

## Homogene Koordinaten

Um eine Translation im  $\mathbb{R}^2$  durchführen zu können, wird jeder zweidimensionale Punkt durch drei Koordinaten dargestellt. Die dritte, zusätzliche Koordinate hat **immer** den Wert **1**, weshalb auch von homogenen Koordinaten gesprochen wird. Der Punkt  $P = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$  wird in homogenen Koordinaten beispielsweise

als  $P_{homogen} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  dargestellt.

Die zusätzliche Dimension ist unabhängig von den anderen beiden und kann daher bei der Matrixmultiplikation zur absoluten Erhöhung bzw. Verringerung der anderen Koordinaten verwendet werden. Die Translationsmatrix (vgl. nächster Abschnitt) für das obige Beispiel zur passiven Verschiebung des Punktes lautet

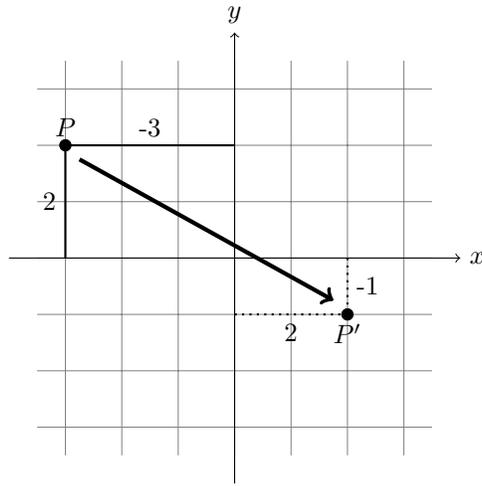


Abbildung 8: Translation: Passive Parallelverschiebung von  $P$  um 5 in der  $x$ - und  $-3$  in der  $y$ -Dimension zu  $P'$

beispielsweise

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus ihr ist zu erkennen, dass sich die neuen  $x$ -/ $y$ -Koordinaten  $x'$  und  $y'$  aus den alten  $x$  und  $y$  wie folgt ergeben:

$$\begin{aligned} x' &= 1 \cdot x + 0 \cdot y + 5 \cdot 1 = x + 5 \\ y' &= 0 \cdot x + 1 \cdot y - 3 \cdot 1 = y - 3 \\ 1 &= 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

$x$  und  $y$  ändern sich also durch die zusätzliche Dimension gerade um die absoluten Werte 5 bzw.  $-3$  (die Multiplikation mit 1 ist neutral), während die zusätzliche Koordinate 1 bleibt. Letztere hat also lediglich eine Art Hilfsfunktion bei der Multiplikation und kann ansonsten vernachlässigt werden.

Im  $\mathbb{R}^3$  verhält es sich analog – die oberen  $3 \cdot 3$  Koeffizienten der Translationsmatrix entsprechen denen der Einheitsmatrix, die ersten drei Elemente der vierten Zeile denen der Nullmatrix, die ersten drei Elemente der vierten Spalte denen des Verschiebungsvektors und das Element in der vierten Zeile und vierten Spalte ist 1:

$$T^{-1} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Auch diese Matrix verschiebt einen Punkt (allerdings im  $\mathbb{R}^3$ ) um 5 nach rechts und um 3 nach unten – die z-Koordinate bleibt allerdings unberührt. Der Punkt

$$P_{homogen} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ wird beispielsweise durch die Transformation mit } T^{-1} \text{ zu}$$

$$P'_{homogen} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ transformiert.}$$

Möchte man aus dem vierdimensionalen, in homogenen Koordinaten gegebenen Punkt  $P'_{homogen}$  den dreidimensionalen Punkt  $P'$  erhalten, so lässt man einfach die vierte Dimension (ohne Informationsverlust) weg. Analog gilt das für die homogenen Koordinaten in  $\mathbb{R}^2$  beim Weglassen der dritten Dimension. Üblicherweise werden zur Dimensionsreduktion so genannte Projektionsmatrizen verwendet, deren Behandlung allerdings den Umfang dieses Skriptums sprengen würde.

## Translationsmatrizen

Um einen Punkt  $P$  im  $\mathbb{R}^2$  passiv um den Translationsvektor  $\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$  parallel zu verschieben, kann folgende Translationsmatrix verwendet werden, nachdem  $P$  wie oben beschrieben in homogenen Koordinaten ausgedrückt wurde:

$$T_{2D}^{-1}(t_x, t_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die aktive Transformation in die entgegengesetzte Richtung muss die Verschiebung wieder aufheben, d.h. die Translationsmatrix für eine Verschiebung des aktiven Koordinatensystems um den Translationsvektor  $\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$  lautet

$$T_{2D}(t_x, t_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Analog lauten die Translationsmatrizen im  $\mathbb{R}^3$  für den Translationsvektor  $\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$

$$T_{3D}^{-1}(t_x, t_y, t_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$T_{3D}(t_x, t_y, t_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & 0 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 & -t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zudem besteht folgender Zusammenhang zwischen der Matrix zur passiven Translation  $T_{3D}^{-1}(t_x, t_y, t_z)$  mit dem Translationsvektor  $\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$  und der Matrix zur äquivalenten passiven Translation  $T_{3D}^{-1}$  mit dem Translationsvektor  $\begin{pmatrix} -t_x \\ -t_y \\ -t_z \end{pmatrix}$ :

$$T_{3D}^{-1}(t_x, t_y, t_z) = T_{3D}(-t_x, -t_y, -t_z)$$

Dieser Zusammenhang entspricht der oben erwähnten Tatsache, dass die Verschiebung des Koordinatensystems in eine Richtung der dazu entgegengesetzten Verschiebung des Punktes und umgekehrt entspricht.

## Skalierungen

Eine Skalierung vergrößert oder verkleinert ein mit seinem Mittelpunkt im Ursprung liegendes geometrisches Objekt oder eine Eigenschaft desselben um einen konstanten Faktor  $a \neq 0$ , auch Skalar genannt. Alle Koordinaten des Objektes werden dabei mit diesem Faktor multipliziert. Abbildung 9 zeigt dies anhand eines Kreises, dessen Radius  $r = 1$  zu  $r' = a \cdot r = 2$  verdoppelt wird, indem die Koordinaten jedes Kreispunktes mit  $a = 2$  multipliziert werden.

Zum Beispiel wird der dargestellte Punkt  $P = r \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$  zu

$$P' = r' \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Eine Skalierung kann daher als Multiplikation aller Punkte  $P$  mit dem Skalar  $a$  dargestellt werden:  $P' = a \cdot P$ . In Matrixform kann die Skalarmultiplikation als Multiplikation von  $a$  mit der Einheitsmatrix  $E$  angeschrieben werden, d.h. als  $Z^{-1} = a \cdot E$ , wobei  $Z$  Skalierungs- oder Zoommatrix genannt wird. Diese Matrix hat im  $\mathbb{R}^n$  den  $n$ -fachen Eigenwert  $a$  sowie eine Determinante von  $a^n$ .

Für die entsprechende aktive Transformation, also eine Skalierung des gesamten Koordinatensystems um den Faktor  $a$ , gilt, analog zu den Überlegungen aus dem Abschnitt „Rotationsmatrizen“, dass eine Vergrößerung des Koordinatensystems um den Faktor  $a$  einer Verkleinerung all seiner Objekte um denselben Faktor, d.h. effektiv  $\frac{1}{a}$  entspricht. Die aktive Skalierungsmatrix kann daher, analog zur passiven, als Multiplikation von  $\frac{1}{a}$  mit der Einheitsmatrix  $E$  angeschrieben werden, d.h. als  $Z = \frac{1}{a} \cdot E$ . Diese Matrix hat im  $\mathbb{R}^n$  den  $n$ -fachen

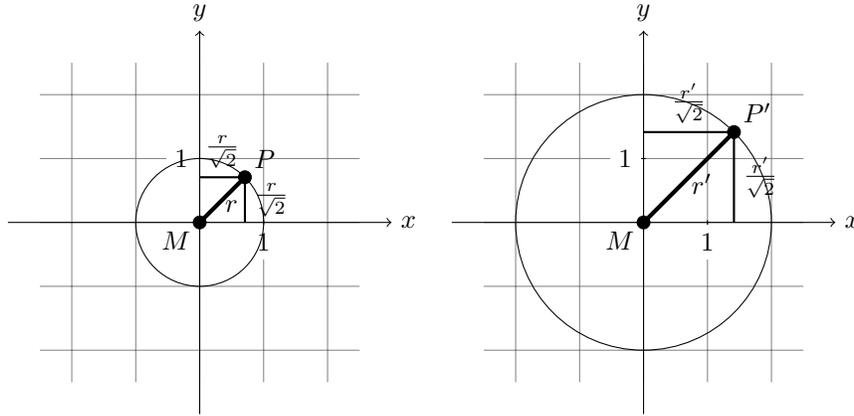


Abbildung 9: Passive Skalierung: Der Radius  $r$  des Kreises (links: vorher) wird um den Faktor 2 auf  $r'$  vergrößert, indem die Koordinaten aller Kreispunkte (z.B.  $P$ ) mit demselben Faktor (z.B. zu  $P'$ ) multipliziert werden (rechts: nachher)

Eigenwert  $\frac{1}{a}$  sowie eine Determinante von  $\frac{1}{a^n}$ .

Es gilt allgemein zu beachten, dass Skalierungen von Objekten, die nicht im Koordinatenursprung liegen, eine vorherige Translation in denselben und eine abschließende Rücktranslation in ihren Ausgangs(-mittel-)punkt erfordern, da letzterer ansonsten nicht notwendigerweise beibehalten wird. Ist die Position des Objektes irrelevant, können die beiden genannten Translationen ausgespart werden.

Weiters gilt zu beachten, dass die Skalierung von Objekteigenschaften, die quadratisch (z.B. Fläche) oder kubisch (z.B. Volumen) von Koordinaten(-differenzen) abhängen, in der Skalierungsmatrix entsprechend berücksichtigt werden müssen, indem anstatt des Faktors  $a$  der auf die Längeneinheit aliquotierte Faktor  $\sqrt{a}$  bzw.  $\sqrt[3]{a}$  gewählt wird. Um beispielsweise die Fläche des Kreises aus Abbildung 9 um den Faktor 2 zu vergrößern, muss  $a = \sqrt{2}$  gewählt werden, womit  $r' = \sqrt{2}$  und dementsprechend  $P' = r' \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  wäre.

## Skalierungsmatrizen

Die Matrix zur passiven Skalierung um den Faktor  $a$  im  $\mathbb{R}^2$  lautet

$$Z_{2D}^{-1}(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Die Matrix zur aktiven Skalierung lautet

$$Z_{2D}(a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

Aus der obigen Überlegung zur entgegengesetzten Skalierung des Koordinatensystems kann allgemein gefolgert werden:

$$Z_{2D}(a) = Z_{2D}^{-1} \left( \frac{1}{a} \right)$$

Analog lautet die Matrix zur passiven Skalierung im  $\mathbb{R}^3$

$$Z_{3D}^{-1}(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

bzw. jene zur aktiven Skalierung

$$Z_{3D}(a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

## Hintereinanderausführung von Transformationen

Es ist möglich, die Hintereinanderausführung mehrerer Transformationen in Form einer einzigen Transformationsmatrix auszudrücken – das spart in der Praxis vor allem Rechenzeit, da nur eine Matrixmultiplikation an Stelle von mehreren durchgeführt werden muss. Die Verkettung von Transformationen erfolgt im Allgemeinen durch die Multiplikation der Transformationsmatrizen, wobei einige Details zu beachten sind.

Werden lediglich Spiegelungen und Rotationen zusammengefasst, kann eine einfache Multiplikation verwendet werden. Enthält die Kette von Transformation aber mindestens eine Translationsmatrix, so ist es notwendig, alle Spiegelungs- und Rotationsmatrizen um eine Dimension zu erweitern, sodass die Dimensionen für die Multiplikation kompatibel sind (vgl. Abschnitt „Homogene Koordinaten“).

Die Dimensionserweiterung bedarf einer Erweiterung jeder dieser Matrizen um eine Zeile und eine Spalte derart, dass das „unterste“ Element der neuen Matrizen 1 ist und alle anderen „aufgefüllten“ Koeffizienten 0 sind, um die homogene Koordinate zu erhalten. Am Beispiel einer dreidimensionalen Matrix  $A$  mit den Koeffizienten  $a_{ij}$  soll diese Dimensionserweiterung allgemein gezeigt werden:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow A_{homogen} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie im Abschnitt „Homogene Koordinaten“ erläutert, ist es zusätzlich notwendig, die Koordinaten des zu transformierenden geometrischen Objektes ebenfalls um eine Dimension zu erweitern und diese am Ende der Transformation wieder zu verwerfen. Sind alle Spiegelungs- und Rotationsmatrizen um eine Dimension erweitert, können sie mit der/den Translationsmatrix/-matrizen (und

Verknüpfungsregel	Spiegelung	Rotation	Translation	Skalierung	Mix
Assoziativität	✓	✓	✓	✓	✓
Kommutativität	–	–	✓	✓	–

Tabelle 1: Allgemeingültigkeit der Regeln zur (multiplikativen) Verknüpfung von Transformationsmatrizen. ✓ bedeutet *gültig*, – *nicht gültig*

das Ergebnis anschließend mit dem in homogenen Koordinaten angegebenen geometrischen Objekt) multipliziert werden und ergeben so eine verkettete Koordinatentransformation.

Da für  $n$  gleich dimensionierte Matrizen  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$  allgemein gilt

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1} \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_{n-1}^{-1} \cdot \dots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$$

bedeutet das für Transformationsmatrizen, dass zur Rücktransformation die Reihenfolge der einzelnen Rücktransformationen bei der Multiplikation genau entgegengesetzt sein muss. Das bedeutet auch, dass zu einer aktiven Transformation, die aus mehreren Einzeltransformationen besteht, immer eine passive Rücktransformation gehört, die alle passiven Einzeltransformationen in genau der umgekehrten Reihenfolge enthält.

Die Hintereinanderausführung mehrerer Transformationen geschieht mittels Matrizenmultiplikation, wobei die Reihenfolge der Matrizen **immer umgekehrt** ist. Zwei Transformationsmatrizen  $X$  und  $Y$  – gleich, ob aktiv oder passiv – werden als verkettete Transformation  $Y \cdot X$  berechnet, wenn zuerst  $X$  und hernach  $Y$  angewandt werden soll. Selbiges gilt analog für mehrere Transformationsmatrizen. Der Grund dafür liegt in der Multiplikationsreihenfolge der Matrizen mit dem Ausgangspunkt  $P$  und der Tatsache, dass die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist. Wird  $P$  durch  $X$  zu  $P'$  und hernach durch  $Y$  zu  $P''$  transformiert, gilt

$$P'' = (Y \cdot X) \cdot P = Y \cdot \underbrace{(X \cdot P)}_{P'} = Y \cdot P' = P''$$

Da die Matrizenmultiplikation im Allgemeinen assoziativ ist, gilt das im Speziellen auch für alle Transformationsmatrizen. Das heißt, dass die Klammern beim zusammenfassenden Multiplizieren der einzelnen Transformationsmatrizen beliebig gesetzt werden können. Tabelle 1 drückt das in der Assoziativitätszeile aus. Im Folgenden sollen spezielle Aspekte der Verkettung von Transformationen gleicher Art (z.B. Hintereinanderausführungen von Spiegelungen) betrachtet werden.

## Verkettete Spiegelungen

Wird ein und dieselbe Spiegelung zwei Mal hintereinander ausgeführt, hebt sich der Spiegeleffekt auf, d.h. man erhält bei Anwendung der verketteten Spiegelung auf einen Punkt wieder den Punkt selbst. Auf die reale Welt übertragen bedeutet das, dass das Spiegelbild des Spiegelbildes wieder das Original ist, wie man in

Abbildung 4 erkennen kann – das Spiegelbild von  $P'$  ist wieder  $P$ . Mathematisch betrachtet muss das so sein, da für alle Spiegelungsmatrizen  $S$  der folgende im Abschnitt „Spiegelungen“ erläuterte Zusammenhang gilt:

$$S = S^{-1}$$

Dadurch ist die Verkettung von  $S$  mit sich selbst

$$S \cdot S = S \cdot S^{-1} = E$$

Ist die insgesamt Transformationsmatrix die Einheitsmatrix, belässt sie alle zu transformierenden Punkte so, wie sie sind, d.h. die Multiplikation mit der Matrix hat keinen Effekt auf die Position des zu transformierenden Punktes. Alle geradzahigen Potenzen einer Spiegelungsmatrix, d.h. geometrisch betrachtet alle aus einer geradzahigen Verkettung von Spiegelungen an derselben Spiegelachse, -/fläche o.ä. bestehenden Transformationen, ergeben die Einheitsmatrix. Die Hintereinanderausführung von zwei verschiedenen Spiegelungen ist im Allgemeinen nicht vertauschbar, wie auch aus Tabelle 1 ersichtlich ist. Lediglich dann, wenn die beiden Spiegelungsgeraden bzw. -ebenen im rechten Winkel aufeinander stehen, lassen sie sich vertauschen. Das hängt (ohne Beweis) damit zusammen, dass auch die Koordinatenachsen im rechten Winkel aufeinander stehen.

Liegen zwei beliebige Spiegelungsgeraden oder -ebenen parallel zueinander, entspricht die Verkettung der beiden hintereinander ausgeführten Spiegelungen einer Translation (vgl. Abbildung 10). Bei der insgesamt doppelten Spiegelung hebt sich die Distanz zwischen dem zu spiegelnden Punkt und dem ersten Spiegel durch den zweiten, parallel liegenden Spiegel auf, wodurch der Punkt lediglich eine Verschiebung um den doppelten Abstand  $d$  der beiden Spiegelungsgeraden bzw. -ebenen erfährt (die Hälfte desselben durch die erste, die andere Hälfte durch die zweite Spiegelungsgerade bzw. -ebene).

Eine gerade Anzahl von Spiegelungen an beliebigen Spiegelungsgeraden im  $\mathbb{R}^2$  lässt sich immer als Rotation um den Schnittpunkt dieser beiden Geraden anschreiben (vgl. Abschnitt „Rotationen um einen Bezugspunkt im  $\mathbb{R}^2$ “). Der Rotationswinkel entspricht dabei dem Doppelten des von den beiden Spiegelungsgeraden eingeschlossenen Winkels, wie in Abbildung 11 dargestellt. Selbiges gilt im  $\mathbb{R}^3$ .

## Verkettete Rotationen

Die Hintereinanderausführung ein und derselben Rotation führt zur Rotation mit dem doppelten Rotationswinkel, da sich der Bezugspunkt bzw. die Rotationsachse sich nicht ändert. Allgemein ist die Verkettung mehrerer verschiedener Rotationen nicht kommutativ (vgl. Tabelle 1), da der Radius des gedachten Rotationskreises der zweiten Rotation um dessen Bezugspunkt bzw. Rotationsachse durch die erste Rotation „verschoben“ wird und dadurch nicht mehr gleich dem ist, der bei der zuerstigen Ausführung der zweiten Rotation entsteht, wie in Abbildung 12 dargestellt.

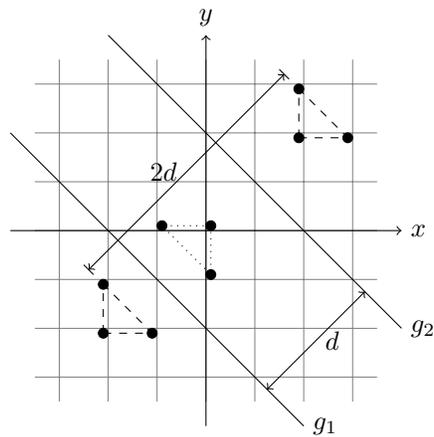


Abbildung 10: Translatorische Doppelspiegelung: Die hintereinander ausgeführte Spiegelung an zwei parallel zueinander liegenden Geraden (zuerst an  $g_1$  und hernach an  $g_2$ ) bewirkt eine Translation um den doppelten Abstand  $d$  der Spiegelungsgeraden

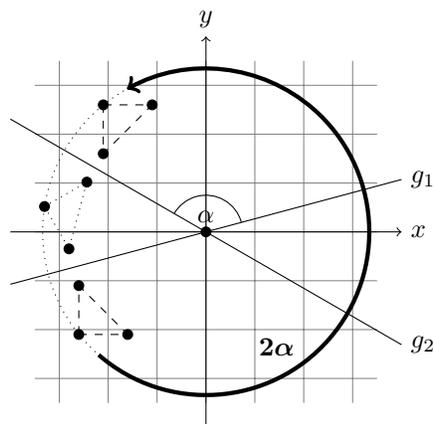


Abbildung 11: Rotation durch Doppelspiegelung: Die hintereinander ausgeführte Spiegelung an zwei Geraden (zuerst an  $g_1$  und hernach an  $g_2$ ) lässt sich als Rotation darstellen. Der Rotationswinkel ist dabei doppelt so groß wie der von den beiden Spiegelungsgeraden eingeschlossene Winkel  $\alpha = 135^\circ$

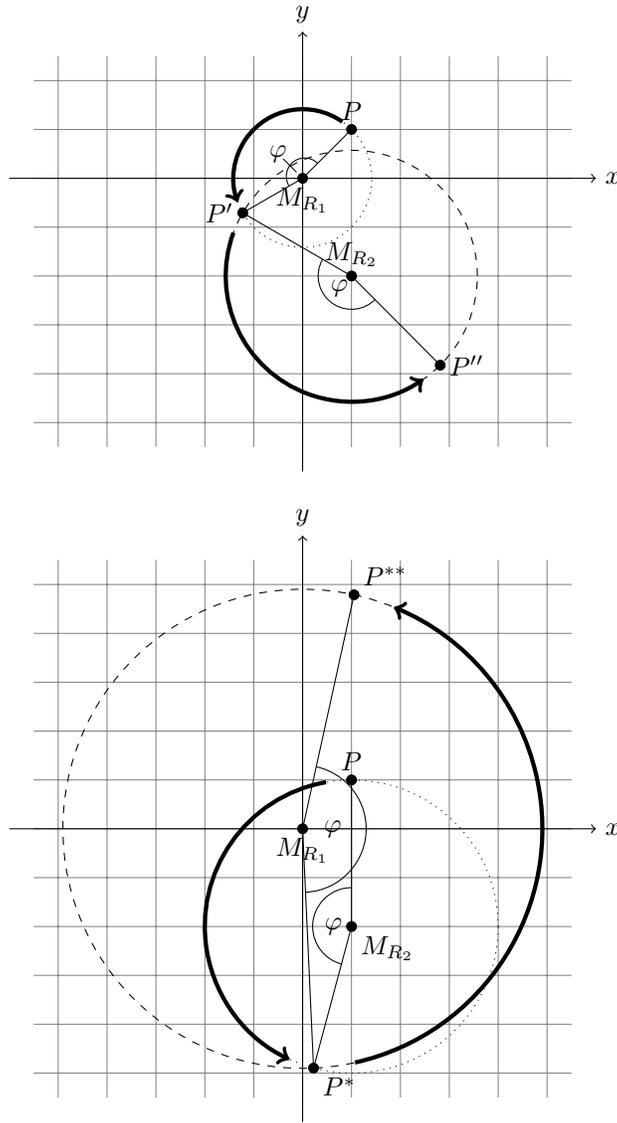


Abbildung 12: Nicht-kommutative Rotationsverkettung im  $\mathbb{R}^2$ : Unterschiedliche Rotationsbezugspunkte führen je nach Rotationsreihenfolge zu anderen Radien der gedachten Rotationskreise. Zuerstige Rotation mit  $\varphi = 165^\circ$  um den Ursprung  $M_{R_1}$  zu  $P'$  und hernach mit  $\varphi$  um  $M_{R_2}$  zu  $P''$  (links) und in der Reihenfolge vertauschte Rotationen zu  $P^*$  bzw.  $P^{**}$  (rechts).  $P'' \neq P^{**}$

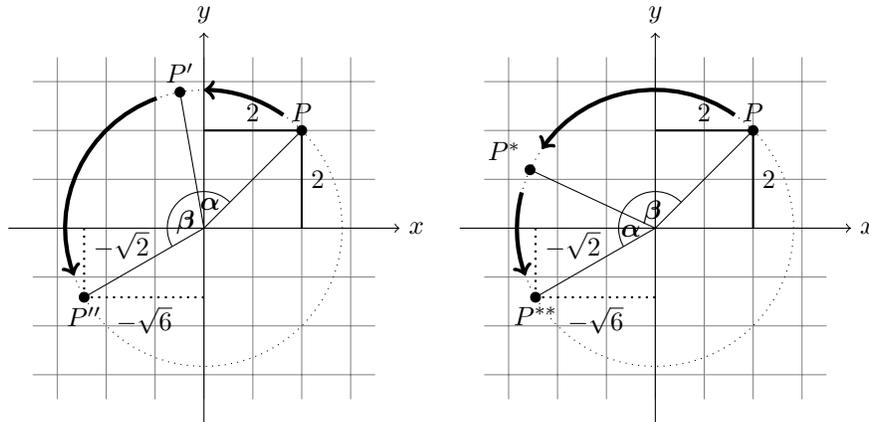


Abbildung 13: Kommutative Rotationsverkettung im  $\mathbb{R}^2$  bei Rotation um den Ursprung:  $P$  wird zuerst passiv mit  $\alpha = 55^\circ$  zu  $P'$  und hernach mit  $\beta = 110^\circ$  zu  $P''$  gedreht (links). Bei vertauschter Reihenfolge, d.h. vorheriger Drehung um  $\beta$  zu  $P^*$  und anschließender Drehung um  $\alpha$  zu  $P^{**}$ , ist der Ergebnispunkt  $P^{**}$  gleich  $P''$  (rechts)

Rotationen um den Ursprung im  $\mathbb{R}^2$  bzw. um eine der Koordinatenachsen im  $\mathbb{R}^3$  bilden in puncto Kommutativität allerdings eine Ausnahme. Da die Rotation mit dem Rotationswinkel  $\varphi$  um den Ursprung als Multiplikation einer komplexen Zahl (als Repräsentation des zu drehenden Punktes) mit  $e^{j\varphi}$  betrachtet werden kann (siehe entsprechender Abschnitt oben) und die Multiplikation dieser winkelverändernden Terme in  $\mathbb{C}$  kommutativ ist, ist es auch die Multiplikation der entsprechenden Rotationsmatrizen. Grafisch veranschaulicht sind winkelverändernde Bewegungen entlang der Rotationskreisbahn unabhängig von deren Reihenfolge, wie in Abbildung 13 dargestellt, da die Winkeladdition kommutativ ist.

## Verkettete Translationen

Die Verkettung von Translationen ist sowohl assoziativ als auch kommutativ, wie Tabelle 1 zeigt. Es spielt also keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Parallelverschiebungen durchgeführt werden. Mathematisch begründet liegt die Kommutativität darin, dass die Vektoraddition sowohl im  $\mathbb{R}^2$  als auch im  $\mathbb{R}^3$  (sowie in den entsprechenden höherdimensionalen Räumen) kommutativ ist. Da, wie im Abschnitt „Translationen“ erläutert, die Translation einer Addition des Punktes mit einem Translationsvektor entspricht und – wie oben beschrieben – die Addition von Vektoren kommutativ ist, ist es auch die Verkettung von Translationen.

Obwohl die Verkettung mehrerer Translationen kommutativ ist, ist es die Verkettung einer Translation mit einer Spiegelung oder Rotation nicht, da die Kom-

mutativität letzterer bezüglich Verkettung nicht gilt. Aus diesem Grund ist eine Multiplikation von Spiegelungs-, Rotations- und Translationsmatrizen nicht kommutativ (vgl. Tabelle 1) – es sei denn, es handelt sich ausschließlich um Translationen und solche Spiegelungen, die sich – wie im Abschnitt „Verkettete Spiegelungen“ beschrieben – ebenfalls als Translationen anschreiben lassen.

## Verkettete Skalierungen

Wie die Verkettung von Translationen ist jene von Skalierungen sowohl assoziativ als auch kommutativ, wie Tabelle 1 zeigt. Begründet liegt dies darin, dass eine Skalierung einer Multiplikation mit einem Skalar entspricht und Skalarmultiplikationen sowohl assoziativ als auch kommutativ sind. Die Hintereinanderausführung zweier Skalierungen mit den Faktoren  $a$  und  $b$  kann dabei zu einer Skalierung mit dem Faktor  $b \cdot a = a \cdot b$  zusammengefasst werden.

Eine Verkettung von Translationen und Skalierungen ist allerdings nicht kommutativ, da für eine kombinierte Vektoraddition mit Skalarmultiplikation das Distributivgesetz gilt. So ist eine Verschiebung um den Translationsvektor  $\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$  im  $\mathbb{R}^2$  mit einer anschließenden Skalierung um einen Faktor  $a \neq 1$  nicht dasselbe wie die in der Reihenfolge vertauschte Transformation, da für jeden Punkt  $P$  nach der Transformation gilt

$$\underbrace{a \cdot \left( P + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \right)}_{\text{Translation zuerst}} = a \cdot P + a \cdot \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \neq \underbrace{a \cdot P + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}}_{\text{Skalierung zuerst}}$$

## Gleichungstransformationen

Werden geometrische Objekte transformiert, deren Punkte sich mit Gleichungen geschlossen beschreiben lassen, ist es oft wünschenswert, diese Gleichungen an Stelle aller einzelnen Punkte des Objektes zu transformieren. Gerade bei einfachen Objekten, die aus unendlich vielen Punkten bestehen, wie z.B. Geraden, Kreisen, Ellipsen etc., ist dies mit relativ geringem Aufwand möglich.

Dabei werden zwei Arten der Gleichungstransformation unterschieden: Während man unter einer passiven Gleichungstransformation die Veränderung der Gleichung eines geometrischen Objektes versteht, das passiv transformiert wird, versteht man unter einer aktiven Gleichungstransformation die Änderung der Gleichung eines solchen Objektes bei aktiver Transformation des Koordinatensystems. Nachfolgend sollen beide Arten der Gleichungstransformation im  $\mathbb{R}^2$  beschrieben werden, wobei dies ohne Verlust der Allgemeingültigkeit geschieht, d.h., dass sich die beschriebenen Schritte auf beliebig viele Dimensionen erweitern lassen.

## Aktive Gleichungstransformationen

Bei einer aktiven Koordinatentransformation wird ein  $x$ - $y$ -Koordinatensystem in ein  $x'$ - $y'$ -Koordinatensystem überführt, sodass die neuen Koordinaten  $x'$  und  $y'$  von den alten  $x$  und  $y$  abhängen, d.h.  $x' = t_x(x, y)$  und  $y' = t_y(x, y)$ , wobei  $t_x$  und  $t_y$  im Falle affiner Transformationen linear von den alten Koordinaten  $x$  und  $y$  abhängige Funktionen sind. Für ein beliebiges geometrisches Objekt, das durch die implizite Funktion  $F(x, y) = 0$  beschrieben ist, soll eine aktive Gleichungstransformation eine transformierte implizite Funktion  $F_t(x', y') = 0$  finden, die dasselbe Objekt im neuen Koordinatensystem beschreibt. Dies geschieht durch Umformen von  $t_x$  nach  $x$  und  $t_y$  nach  $y$  und Einsetzen in  $F(x, y)$ . Beschreibt beispielsweise

$$F(x, y) = 2 \cdot x - y = 0$$

die Gerade  $y = f(x) = 2 \cdot x$  und wird das Koordinatensystem um den Translationsvektor  $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$  verschoben (vgl. Abbildung 14), d.h.

$$\begin{aligned}x' &= t_x(x, y) = x - 3 \\y' &= t_y(x, y) = y - 3\end{aligned}$$

(vgl. Abschnitt „Translationen“), ergibt das Umformen nach  $x$  bzw.  $y$

$$\begin{aligned}x &= x' + 3 \\y &= y' + 3\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in  $F(x, y)$  ergibt sich die transformierte Funktion

$$F_t(x', y') = 2 \cdot x - y = 0 = 2 \cdot (x' + 3) - (y' + 3) = 0$$

was sich weiter vereinfacht zu

$$F_t(x', y') = 2 \cdot x' + 6 - y' - 3 = 2 \cdot x' - y' + 3 = 0$$

Analog zur oben beschriebenen Translation lassen sich Spiegelungen, Rotationen und Skalierungen als Transformationsfunktionen nutzen. Soll beispielsweise das die Gerade  $f(x)$  aus dem obigen Beispiel beinhaltende Koordinatensystem um  $45^\circ$  gedreht werden, ist

$$\begin{aligned}x' &= t_x(x, y) = \cos(45^\circ) \cdot x + \sin(45^\circ) \cdot y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x + y) \\y' &= t_y(x, y) = -\sin(45^\circ) \cdot x + \cos(45^\circ) \cdot y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-x + y)\end{aligned}$$

(vgl. Abschnitt „Rotationen“). Umformen ist hier nicht trivial möglich, weswegen zuerst  $x' - y'$  und  $x' + y'$  berechnet werden, um Abhängigkeiten zu eliminieren:

$$x' - y' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x + y + x - y) = \frac{2 \cdot x}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot x$$

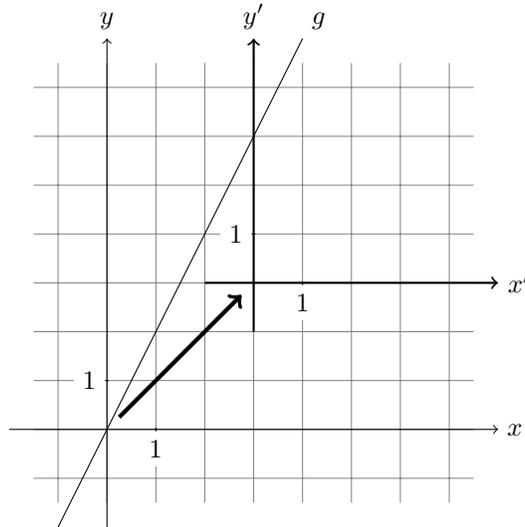


Abbildung 14: Aktive Gleichungstransformation: Das  $x$ - $y$ -Koordinatensystem wird um je 3 in  $x$ - und  $y$ -Richtung zu einem  $x'$ - $y'$ -Koordinatensystem verschoben, wodurch die Geradengleichung von  $g$  in den neuen Koordinaten von jener in den alten abweicht – der Schnittpunkt mit der neuen  $y'$ -Achse ist  $x' = 3$ , während der mit der alten  $y$ -Achse  $x = 0$  ist. Die Steigung bleibt unverändert

bzw.

$$x' + y' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x + y - x + y) = \frac{2 \cdot y}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot y$$

Mit den jeweils rechten Seiten der Gleichungen lassen sich nun  $x$  und  $y$  ausdrücken:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x' - y') \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x' + y') \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in  $F(x, y)$  ergibt sich die transformierte Funktion

$$F_t(x', y') = 2 \cdot x - y = 0 = 2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x' + y') \right) - \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x' - y') \right) = 0$$

Diese vereinfacht sich zu

$$F_t(x', y') = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (2 \cdot x' + 2 \cdot y' - (x' - y')) = 0$$

und nach Multiplikation mit  $\sqrt{2}$  auf beiden Seiten weiter zu

$$F_t(x', y') = 2 \cdot x' + 2 \cdot y' - x' + y' = x' + 3 \cdot y' = 0$$

was in expliziter Form  $y = f_t(x) = \frac{x}{3}$  entspricht.

Dass die Gerade aus dem alten Koordinatensystem mit jener aus dem neuen tatsächlich einen Winkel von  $45^\circ$  einschließt, lässt sich über die beiden Richtungsvektoren,  $\vec{r}_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{r}_{f_t} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$  zeigen, da für den von den beiden Richtungsvektoren eingeschlossenen Winkel  $\beta$  gilt:

$$\cos(\beta) = \frac{\vec{r}_f \cdot \vec{r}_{f_t}}{\|\vec{r}_f\| \cdot \|\vec{r}_{f_t}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{\sqrt{5} \cdot \frac{10}{9}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{\sqrt{50}}{3}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Somit ist  $\beta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ , was dem durch die beiden Geraden eingeschlossenen Winkel (wie zu erwarten) entspricht.

## Passive Gleichungstransformationen

Im Gegensatz zu einer aktiven Koordinatentransformation wird das Koordinatensystem bei einer passiven Koordinatentransformation nicht verändert. Es ändert sich lediglich die Gleichung des transformierten Objektes, wobei sich letzteres nach wie vor im selben Koordinatensystem befindet. Bei der Transformation hängen also die neuen Koordinaten  $x'$  und  $y'$  des Objektes von den alten  $x$  und  $y$  ab, die über  $x' = t_x(x, y)$  und  $y' = t_y(x, y)$  definiert werden. Für ein beliebiges geometrisches Objekt, das durch die implizite Funktion  $F(x, y) = 0$  beschrieben ist, soll eine passive Gleichungstransformation eine transformierte implizite Funktion  $F_t(x', y') = 0$  finden, die das neue Objekt im selben Koordinatensystem beschreibt.

Dies geschieht äquivalent zur aktiven Gleichungstransformation durch Umformen von  $t_x$  nach  $x$  und  $t_y$  nach  $y$  und Einsetzen in  $F(x, y)$ . Analog zum Beispiel aus dem vorigen Abschnitt wird die durch die Gleichung

$$F(x, y) = 2 \cdot x - y = 0$$

beschriebene Gerade  $y = f(x) = 2 \cdot x$  um den Translationsvektor  $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$  in die Gegenrichtung des Koordinatensystems aus dem obigen Beispiel verschoben, womit durch

$$\begin{aligned} x' &= t_x(x, y) = x - 3 \\ y' &= t_y(x, y) = y - 3 \end{aligned}$$

$x$  und  $y$  exakt gleich wie oben definiert sind und das Einsetzen zum selben Ergebnis wie im obigen Beispiel führt. Die beiden Transformationen sind also – wie bereits im Abschnitt „Translationen“ erläutert – äquivalent. Selbiges gilt für das zweite Beispiel aus dem obigen Abschnitt mit einem negativen Rotationswinkel von  $-45^\circ$ .

Es gilt anzumerken, dass es geometrische Objekte gibt, die rotationsinvariant

sind, d.h., die ihre Gleichung nicht ändern, wenn sie gedreht werden. Ein Beispiel hierfür ist ein Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung bei einer Rotation um den Ursprung. Nachfolgend soll dies anhand der Rotation des Einheitskreises um  $-45^\circ$  gezeigt werden. Ein Beweis für die Rotationsinvarianz von im Mittelpunkt liegenden Kreisen im Allgemeinen ist im Anhang „Beweis der Rotationsinvarianz bestimmter Kreisgleichungen“ zu finden.

Analog zum zweiten Beispiel aus dem vorherigen Abschnitt gilt durch das Ausdrücken von  $x$  und  $y$  für die passive Rotation um  $-45^\circ$

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x' - y') \\y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x' + y')\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Gleichung des Einheitskreises  $x^2 + y^2 = 1$  bzw.  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  erhält man die transformierte Kreisgleichung

$$F_t(x', y') = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x' - y') \right)^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x' + y') \right)^2 - 1 = 0$$

Diese vereinfacht sich durch Herausheben der beiden Faktoren von  $\left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$  zu

$$F_t(x', y') = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 2 \cdot x' \cdot y' + y'^2 + x'^2 + 2 \cdot x' \cdot y' + y'^2) - 1 = 0$$

und weiter zu

$$F_t(x', y') = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2) - 1 = 0 = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

was der ursprünglichen Kreisgleichung  $x^2 + y^2 = 1$  entspricht.

## Praxisbeispiel

Abschließend soll die praktische Anwendung der in diesem Skriptum zusammengefassten Aspekte anhand eines umfangreicheren Beispiels demonstriert werden. Aufgrund der Relevanz der in diesem Skriptum beschriebenen Transformationen für die Computergrafik und die angenommene Vertrautheit mit Computerspielen wird ein (möglichst anschauliches und praktisch nachvollziehbares) Beispiel aus dem Bereich der Computergrafik gewählt.

### Aufgabenstellung

Eine (zweidimensionale) Kompassnadel solle in einem Computerspiel anzeigen, in welche Richtung sich die Spielfigur bewegt. Die nach Norden ausgerichtete

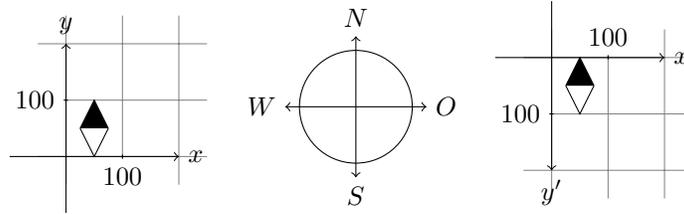


Abbildung 15: Kompassnadel: Nach Norden ausgerichtete Ausgangsgrafik in einem „regulären“ Koordinatensystem (links) und einem typischen Bildschirmkoordinatensystem mit richtungsverkehrter y-Achse (rechts). Die Windrose (Mitte) zeigt die Lage der Haupthimmelsrichtungen

Kompassnadel sei als Grafik (Größe:  $100 \cdot 100$  Bildelemente, d.h. Pixel) gegeben (vgl. Abbildung 15 links) und die Bewegungsrichtung der Spielfigur (Westen, vgl. Abbildung 15 Mitte) bekannt. Der Bildschirm habe eine Größe von  $1920 \cdot 1080$  Pixeln, wobei sich der Koordinatenursprung in der linken oberen Bildschirmecke befinde. Wie in aktuell verfügbarer Computergrafiksoftware üblich seien die y-Koordinaten in Richtung des unteren Bildschirmrandes aufsteigend und positiv, d.h. die y-Achse im Vergleich zu einem „regulären“ Koordinatensystem richtungsverkehrt (vgl. Abbildung 15 rechts).

Die Kompassnadel ist auf Basis der gegebenen Bewegungsrichtung mittels Koordinatentransformation in einem die Kompassnadel enthaltenden (und damit den Kompass darstellenden) Kreis in der rechten oberen Bildschirmecke in einer Größe von  $50 \cdot 50$  Pixel korrekt auszurichten. Gesucht sind eine Transformationsmatrix, die dies bewerkstelligt sowie eine Gleichung, die den Kreis beschreibt.

## Musterlösung

Die Lösung der Aufgabenstellung besteht aus zwei Teilen – der Ermittlung der Kreisgleichung und der Ermittlung der Transformationsmatrix für die Kompassnadel. Da ein Teil letzterer durch das Bekanntsein der Kreisgleichung vereinfacht wird, wird diese zuerst ermittelt.

Der Durchmesser des Kreises, der die Kompassnadel umschließen soll, muss gleich groß sein wie die verkleinerte Kompassnadel, d.h. 50 Pixel. Demnach muss sein Radius die Hälfte, d.h. 25 Pixel, messen. Da der (Kompass-)Kreis laut Aufgabenstellung in der rechten oberen Bildschirmecke platziert werden soll, muss der Kreismittelpunkt so liegen, dass die Kreislinie den oberen und den rechten Bildschirmrand berührt. Durch den Radius von 25 Pixeln muss der Kreismittelpunkt daher jeweils 50 Pixel in x- und in y-Richtung von den Koordinaten der rechten oberen Bildschirmecke entfernt liegen.

Da der letzte sichtbare Pixel  $P$  des Bildschirms aus der Aufgabenstellung heraus die x-Koordinate 1920 und die y-Koordinate 0 (nicht 1080, da die y-Achse richtungsverkehrt ist und am oberen Bildschirmrand bei 0 beginnt) haben muss, muss der Kreismittelpunkt durch die vorherigen Überlegungen die x-Koordinate

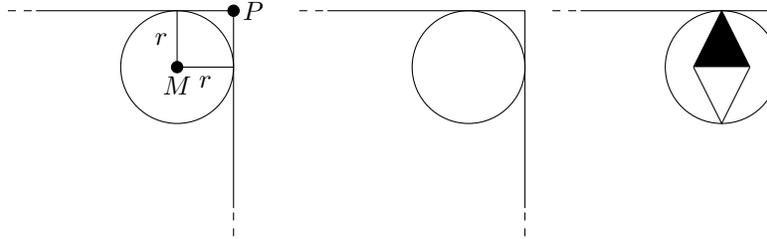


Abbildung 16: (Kompass-)Kreispositionierung (vergrößerter Ausschnitt der rechten oberen Bildschirmcke): Die Koordinaten des Kreismittelpunktes  $M$  lassen sich mit gegebenem  $r$  und  $P$  errechnen (links). Positionierter Kreis ohne (Mitte) und mit beispielhaft genordeter Kompassnadel (rechts)

$1920 - 25 = 1895$  und die  $y$ -Koordinate  $0 + 25 = 25$  ( $y$ -Koordinaten werden in Richtung des unteren Bildschirmrandes größer) haben (vgl. Abbildung 16 links). Die allgemeine Gleichung für einen Kreis mit Radius  $r$  und  $x$ - und  $y$ -Mittelpunktkoordinaten  $x_M$  und  $y_M$  lautet

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

Folglich lautet die Gleichung des gesuchten (Kompass-)Kreises in Bildschirmkoordinaten

$$(x - 1895)^2 + (y - 25)^2 = 625$$

Dass die  $y$ -Achse richtungsverkehrt ist, spielt keine Rolle, da der Entwurf des Kreises bereits in Bildschirmkoordinaten durchgeführt wurde und der Kreis zudem seine Form durch eine Spiegelung nicht verändern würde. Außerdem gilt zu beachten, dass die Kreisgleichung auch aus der Gleichungstransformation eines Einheitskreises hätte gewonnen werden können, worauf der Übersicht halber aber verzichtet wurde.

Im nächsten Schritt wird die Transformationsmatrix für die Kompassnadel ermittelt. Die Transformation erfolgt passiv, da die Kompassnadel positioniert und nicht das Bildschirmkoordinatensystem verändert werden soll. Eine äquivalente aktive Transformation ist zwar möglich, in diesem Beispiel aber nicht sinnvoll.

Es wird angenommen, dass sich die Kompassnadel, wie in Abbildung 15 rechts dargestellt, bereits im Bildschirmkoordinatensystem befindet – und zwar in der linken oberen Ecke, da die sie enthaltende Grafik in der linken oberen Ecke den Koordinatenursprung berührt.

Im ersten Schritt muss die Nadel so rotiert werden, dass sie in Bewegungsrichtung der Spielfigur (Westen, vgl. Aufgabenstellung) zeigt. Da die Nord- und die Westlinie der Windrose einen Winkel von  $90^\circ$  einschließen (vgl. Abbildung 15 Mitte), muss die ursprünglich nördlich ausgerichtete Nadel um  $90^\circ$  um ihren eigenen Mittelpunkt rotiert werden, um nach Westen zu zeigen.

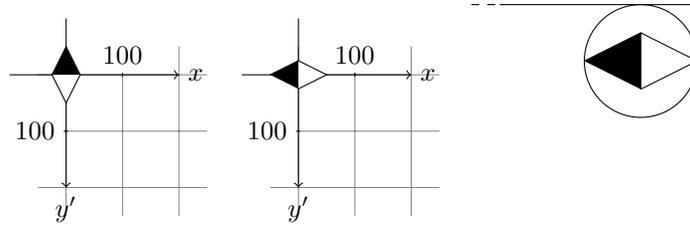


Abbildung 17: (Kompass-)Nadelpositionierung: In den Koordinatenursprung durch  $T_1^{-1}$  verschobene Nadel (links), deren um  $90^\circ$  durch  $R_1^{-1}$  gedrehtes Pendant (Mitte) und die durch  $Z_1^{-1}$  verkleinerte (nicht dargestellt) sowie durch  $T_2^{-1}$  in ihre finale Position gebrachte Nadel (rechts, vergrößerter Bildausschnitt)

Wie im Abschnitt „Rotationen um einen Bezugspunkt im  $\mathbb{R}^2$ “ erläutert, kann diese Rotation in zwei Translationen und eine Rotation um den Koordinatenursprung aufgespalten werden. Da das Koordinatensystem nicht verschoben werden soll, wird die Nadel zunächst passiv in den Koordinatenursprung verschoben. Da ihr Mittelpunkt auf den Bildschirmkoordinaten  $\begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}$  liegt, muss sie um den Richtungsvektor  $\begin{pmatrix} -50 \\ -50 \end{pmatrix}$  verschoben werden (vgl. Abbildung 17 links), d.h. die erste Translationsmatrix (in homogenen Koordinaten) lautet

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & -50 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Im Anschluss folgt die passive Drehung um  $90^\circ$  (vgl. Abbildung 17 Mitte) mit der ersten Rotationsmatrix in homogenen Koordinaten zur einfacheren späteren Verkettung:

$$R_1^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) & 0 \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Rückpositionierung der Nadel ist an dieser Stelle nicht sinnvoll, da sie einerseits ohnehin in die rechte obere Bildschirmecke verschoben werden muss und andererseits zuvor noch verkleinert werden muss. Die laut Angabe geforderter Verkleinerung von  $100 \cdot 100$  auf  $50 \cdot 50$  Pixel entspricht einem Skalierungsfaktor von  $\frac{1}{2}$  und damit folgender Skalierungsmatrix in homogenen Koordinaten:

$$Z_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da der Mittelpunkt der Nadel, der nach den vorangegangenen Transformationen die Koordinaten  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  hat, in den Mittelpunkt des Kreises verschoben werden

muss, kann der Translationsvektor direkt aus der Kreisgleichung (bzw. den darin enthaltenen Kreismittelpunktkoordinaten) abgelesen werden:  $\begin{pmatrix} 1895 \\ 25 \end{pmatrix}$  (vgl. Abbildung 16 links und 17 rechts). Die zweite Translationsmatrix lautet also in homogenen Koordinaten

$$T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1895 \\ 0 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verkettet man nun alle vier Transformationsmatrizen durch Matrizenmultiplikation in umgekehrter Reihenfolge, erhält man die Matrix für die Gesamttransformation der Kompassnadel  $K^{-1}$  in homogenen Koordinaten:

$$K^{-1} = T_2^{-1} \cdot Z_1^{-1} \cdot R_1^{-1} \cdot T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1920 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da die Kompassnadel nicht durch eine geschlossene Funktion beschrieben werden kann, ergibt sich aus  $K^{-1}$  der Zusammenhang zwischen den ursprünglichen Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  und den transformierten Koordinaten  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$  jedes Punktes der Kompassnadelgrafik:

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{y}{2} + 1920 \\ y' &= \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Abschließend sei bemerkt, dass die Berücksichtigung der richtungsverkehrten y-Achse in den einzelnen Transformationsschritten ein Spiegeln der y-Achse erspart. Läge die Kompassnadel zu Beginn in einem „regulären“ Koordinatensystem, müsste abschließend eine Spiegelung an der x-Achse (um die y-Koordinate zu invertieren, vgl. Abschnitt „Transformationen über Matrizen“) durchgeführt werden. In der Praxis ist eine solche zusätzliche Transformation aber kaum notwendig, da Grafiken meist in Koordinaten vorliegen, deren dazugehöriges Koordinatensystem dieselbe Orientierung wie das Bildschirmkoordinatensystem hat.

## Anhang

In den nachfolgenden Anhängen sind Beweise und Übersichten dargestellt, die nicht essenziell für das Verständnis dieses Skriptums sind und/oder die entsprechenden Abschnitte zu sehr überladen hätten. Sie sollen daher an dieser Stelle dem Zwecke der Ergänzung und Vervollständigung einiger Aspekte des behandelten Themengebietes dienen.

### Herleitung der Spiegelungsmatrix im $\mathbb{R}^2$

Die Spiegelung eines Punktes  $P$  an einer Gerade  $g_S$ , die mit der x-Achse einen Winkel von  $\alpha$  einschließt, zu  $P'$  kann auch wie folgt beschrieben werden: Da  $P'$  denselben Abstand vom Schnittpunkt  $S$  der gedachten Spiegelungslinie  $s$  mit  $g_S$  hat wie  $P$  und beide Richtungsvektoren der Spiegelungslinie,  $\vec{s}$  und  $-\vec{s}$ , im rechten Winkel auf  $g_S$  stehen (vgl. Abbildung 18), gilt:

$$P' = S + \vec{s}$$

Zuerst soll die Gleichung der Spiegelungsgeraden  $g_s$  in Vektorform angegeben werden. Da die Gerade mit der x-Achse einen Winkel von  $\alpha$  einschließt, ist ihr Richtungsvektor  $\vec{g}_S = \begin{pmatrix} 1 \\ \tan(\alpha) \end{pmatrix}$  und damit die Geradengleichung in Vektorform mit dem Parameter  $l_g$

$$g_S : l_g \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \tan(\alpha) \end{pmatrix}$$

Da  $\vec{s}$  normal auf  $\vec{g}_S$  steht, kann ersterer als Normalvektor von letzterem ermittelt werden. Dies geschieht im  $\mathbb{R}^2$  durch Vertauschen der x- und y-Komponente und das Ändern des Vorzeichens einer Koordinate. Da es hierfür zwei Möglichkeiten gibt, soll lediglich eine gewählt und in weiterer Folge eine „negative“ Länge von  $\vec{s}$  (nachfolgend als  $l_s$  bezeichnet) erlaubt werden. Damit ist die Geradengleichung von  $s$  in Vektorform mit dem Parameter  $l_s$  und dem bekannten Ausgangspunkt  $P$

$$s : P + l_s \cdot \begin{pmatrix} \tan(\alpha) \\ -1 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt  $S$  ergibt sich dann durch Gleichsetzen der beiden Gleichungen von  $g_S$  und  $s$ :

$$l_g \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \tan(\alpha) \end{pmatrix} = P + l_s \cdot \begin{pmatrix} \tan(\alpha) \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wird jede Zeile separat angeschrieben, erhält man

$$\begin{aligned} l_g \cdot 1 &= P_x + l_s \cdot \tan(\alpha) \\ l_g \cdot \tan(\alpha) &= P_y + l_s \cdot (-1) \end{aligned}$$

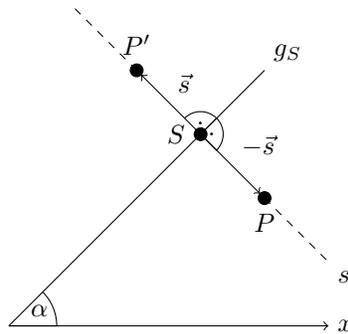


Abbildung 18: Beweisskizze zur Herleitung der Spiegelungsmatrix:  $P'$  lässt sich von  $S$  aus erreichen, wobei  $S$  der Schnittpunkt der Spiegelungslinie  $s$  (mit Richtungsvektor  $\vec{s}$ ) mit  $g_S$  ist, in dem beide im rechten Winkel aufeinander stehen

wobei  $P_x$  und  $P_y$  die x- bzw. y-Koordinate von  $P$  bezeichnen. Drückt man  $l_s$  in der unteren Gleichung aus, erhält man

$$l_s = P_y - l_g \cdot \tan(\alpha)$$

Setzt man  $l_s$  anschließend in die obere Gleichung ein, ergibt sich

$$l_g = P_x + (P_y - l_g \cdot \tan(\alpha)) \cdot \tan(\alpha)$$

bzw. ausmultipliziert

$$l_g = P_x + P_y \cdot \tan(\alpha) - l_g \cdot \tan^2(\alpha)$$

Umformen nach  $l_g$  ergibt

$$l_g \cdot (1 + \tan^2(\alpha)) = P_x + P_y \cdot \tan(\alpha)$$

bzw.

$$l_g = \frac{P_x + P_y \cdot \tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)}$$

Dadurch ergibt sich der eindeutige Schnittpunkt  $S$  durch Einsetzen von  $l_g$  in die Geradengleichung  $g_s$

$$S = \frac{P_x + P_y \cdot \tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \tan(\alpha) \end{pmatrix}$$

bzw. nach Auftrennung der beiden Zeilen

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{P_x + P_y \cdot \tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} \cdot 1 \\ S_y &= \frac{P_x + P_y \cdot \tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} \cdot \tan(\alpha) \end{aligned}$$

wobei  $S_x$  und  $S_y$  die x- bzw. y-Koordinate von  $S$  bezeichnen. Vereinfacht ergibt sich so

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{P_x + P_y \cdot \tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} \\ S_y &= \frac{\tan(\alpha) \cdot (P_x + P_y \cdot \tan(\alpha))}{1 + \tan^2(\alpha)} \end{aligned}$$

und aufgetrennt und ausmultipliziert

$$\begin{aligned} S_x &= P_x \cdot \frac{1}{1 + \tan^2(\alpha)} + P_y \cdot \tan(\alpha) \cdot \frac{1}{1 + \tan^2(\alpha)} \\ S_y &= P_x \cdot \tan(\alpha) \cdot \frac{1}{1 + \tan^2(\alpha)} + P_y \cdot \tan^2(\alpha) \cdot \frac{1}{1 + \tan^2(\alpha)} \end{aligned}$$

Da gilt, dass  $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ , ist

$$\frac{1}{1 + \tan^2(\alpha)} = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}} = \frac{1}{\frac{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}$$

Da für alle  $\alpha$  gilt, dass  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ , gilt weiters

$$\frac{1}{1 + \tan^2(\alpha)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\alpha)}} = \cos^2(\alpha)$$

Damit vereinfachen sich die x- und y-Koordinaten von  $S$  zu

$$\begin{aligned} S_x &= P_x \cdot \cos^2(\alpha) + P_y \cdot \tan(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \\ S_y &= P_x \cdot \tan(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) + P_y \cdot \tan^2(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \end{aligned}$$

bzw. durch  $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$  weiter zu

$$\begin{aligned} S_x &= P_x \cdot \cos^2(\alpha) + P_y \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot \cos^2(\alpha) \\ S_y &= P_x \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot \cos^2(\alpha) + P_y \cdot \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \cdot \cos^2(\alpha) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} S_x &= P_x \cdot \cos^2(\alpha) + P_y \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \\ S_y &= P_x \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + P_y \cdot \sin^2(\alpha) \end{aligned}$$

und abschließend durch Herausheben zu

$$\begin{aligned} S_x &= \cos(\alpha) \cdot (P_x \cdot \cos(\alpha) + P_y \cdot \sin(\alpha)) \\ S_y &= \sin(\alpha) \cdot (P_x \cdot \cos(\alpha) + P_y \cdot \sin(\alpha)) \end{aligned}$$

Wie zu Beginn beschrieben, wird zur abschließenden Berechnung von  $P'$  auch die Länge von  $\vec{s}$  benötigt:

$$P' = S + \vec{s}$$

Da durch die Symmetrie der Spiegelung gilt, dass  $-\vec{s} = \overline{SP} = P - S$  und damit  $\vec{s} = S - P$ , berechnet sich  $P'$  zu

$$P' = S + S - P = 2 \cdot S - P$$

bzw. durch Einsetzen von  $S$  von oben zu

$$\begin{aligned} P'_x &= 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot (P_x \cdot \cos(\alpha) + P_y \cdot \sin(\alpha)) - P_x \\ P'_y &= 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot (P_x \cdot \cos(\alpha) + P_y \cdot \sin(\alpha)) - P_y \end{aligned}$$

Umformen ergibt

$$\begin{aligned} P'_x &= (2 \cdot \cos^2(\alpha) - 1) \cdot P_x + 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \cdot P_y \\ P'_y &= 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot P_x + (2 \cdot \sin^2(\alpha) - 1) \cdot P_y \end{aligned}$$

Die folgenden trigonometrischen Identitäten gelten für alle  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \cos^2(\alpha) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2\alpha) \\ \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) &= \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha) \\ \sin^2(\alpha) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2\alpha) \end{aligned}$$

Dadurch ergeben sich die Gleichungen für  $P'$  zu

$$\begin{aligned} P'_x &= \left(2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos(2\alpha) + \frac{1}{2}\right) - 1\right) \cdot P_x + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha) \cdot P_y \\ P'_y &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha) \cdot P_x + \left(2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2\alpha)\right) - 1\right) \cdot P_y \end{aligned}$$

bzw. vereinfacht zu

$$\begin{aligned} P'_x &= \cos(2\alpha) \cdot P_x + \sin(2\alpha) \cdot P_y \\ P'_y &= \sin(2\alpha) \cdot P_x - \cos(2\alpha) \cdot P_y \end{aligned}$$

Dies ergibt in der Darstellung

$$P' = S_{2D}^{-1}(\alpha) \cdot P$$

die bekannte Spiegelungsmatrix

$$S_{2D}^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass diese Herleitung nicht die einzig mögliche ist und andere grafische Herleitungen existieren.

## Herleitung der passiven Rotationsmatrix im $\mathbb{R}^2$

Wie im Abschnitt „Verkettete Rotationen“ erläutert, lässt sich die Rotation eines Punktes  $P = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix}$  um einen Winkel  $\varphi$  um den Ursprung zu einem Punkt  $P' = \begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \end{pmatrix}$  in  $\mathbb{C}$  als eine Multiplikation mit  $e^{j\varphi}$  schreiben, wenn  $P$  und  $P'$  als komplexe Zahlen  $\underline{P}$  bzw.  $\underline{P}'$  aufgefasst werden, d.h.

$$\underline{P} = P_x + j \cdot P_y$$

bzw.

$$\underline{P}' = P'_x + j \cdot P'_y$$

Es gilt dann nach dem obigen Zusammenhang

$$\underline{P}' = \underline{P} \cdot e^{j\varphi}$$

Durch Einsetzen der obigen Formel erhält man

$$P'_x + j \cdot P'_y = (P_x + j \cdot P_y) \cdot e^{j\varphi}$$

Da für alle  $\varphi$  gilt, dass  $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$ , gilt weiters

$$P'_x + j \cdot P'_y = (P_x + j \cdot P_y) \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))$$

bzw. ausmultipliziert

$$P'_x + j \cdot P'_y = P_x \cdot \cos(\varphi) + P_x \cdot j \cdot \sin(\varphi) + j \cdot P_y \cdot \cos(\varphi) - P_y \cdot \sin(\varphi)$$

Umgruppierung zur nachfolgenden Trennung in Real- und Imaginärteil ergibt

$$P'_x + j \cdot P'_y = P_x \cdot \cos(\varphi) - P_y \cdot \sin(\varphi) + j \cdot (P_x \cdot \sin(\varphi) + P_y \cdot \cos(\varphi))$$

Damit kann folgender Zusammenhang abgelesen werden:

$$P'_x = P_x \cdot \cos(\varphi) - P_y \cdot \sin(\varphi)$$

$$P'_y = P_x \cdot \sin(\varphi) + P_y \cdot \cos(\varphi)$$

Dies ergibt in der Darstellung

$$P' = R_{2D}^{-1}(\varphi) \cdot P$$

die bekannte passive Rotationsmatrix

$$R_{2D}^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Es gilt zu beachten, dass diese Herleitung nicht die einzig mögliche ist. Sehr weit verbreitet ist auch die grafische Herleitung über Längenbeziehungen von Dreiecksseiten, die aus den x- und y-Koordinaten von  $P$  und  $P'$  mit dem bekannten Winkel  $\varphi$  konstruiert werden.

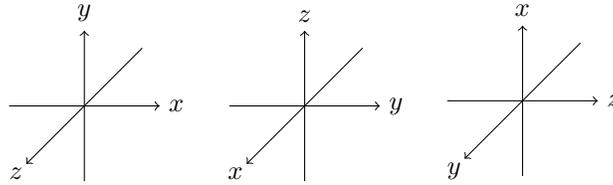


Abbildung 19: Durch Achsentausch entstehende Ansichten des Koordinatensystems: Aus dem Originalsystem, dessen z-Achse die Raumachse ist (links), wird durch einen Ansichtswechsel ein System, dessen x-Achse die Raumachse ist (Mitte). Ein weiterer Ansichtswchsel liefert ein System, dessen y-Achse die Raumachse ist (rechts)

### Herleitung der weiteren Rotationszusammenhänge im $\mathbb{R}^3$

Ausgehend von den Koordinatenzusammenhängen der dreidimensionalen Rotation um die z-Achse sollen nachfolgend ebensolche Zusammenhänge für die Rotation um die x- und die y-Achse hergeleitet werden. Abbildung 19 links zeigt das Koordinatensystem, von dem ausgegangen wird. In diesem ist die z-Achse die Raumachse, d.h. jene, die aus dem Papier herauskäme, so ihr das möglich wäre.

Betrachtet man das Ausgangskordinatensystem gedachterweise nun von der positiven x-Achse aus, erhielte man die Ansicht in Abbildung 19 Mitte. Es gilt zu beachten, dass diese Ansicht nur eine weitere Sicht desselben Koordinatensystems ist, wenngleich von einem anderen Beobachtungspunkt aus. An letzterem erscheinen alle Achsen im Vergleich zum Originalsystem zyklisch durch ihre jeweils im Alphabet nachfolgenden vertauscht, d.h. die ehemalige x-Achse ist nun die y-Achse, die ehemalige y-Achse die z-Achse und die ehemalige z-Achse die x-Achse.

Da die x-Achse nun die Raumachse ist, erlaubt dies die Schlussfolgerung, dass eine Rotation um die x-Achse durch eine Rotation um die z-Achse (die ehemalige Raumachse) abgebildet werden kann, wenn die Rotation um die z-Achse aus einer Ansicht geschieht, in der die ehemalige x-Achse der z-Achse entspricht. Da ein Wechsel der Sicht das Koordinatensystem selbst nicht verändert, kann also durch zyklisches Vertauschen der Achsen eine Rotation um die x-Achse realisiert werden.

Aus dem bereits bekannten Zusammenhang der Koordinaten für die passive Rotation um die z-Achse

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos(\varphi) - y \cdot \sin(\varphi) \\ y' &= x \cdot \sin(\varphi) + y \cdot \cos(\varphi) \\ z' &= z \end{aligned}$$

ergibt sich durch zyklisches Vertauschen der Achsen, d.h. von  $x$  zu  $y$ ,  $y$  zu  $z$  und  $z$  zu  $x$  (und analog für  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$ )

$$\begin{aligned}y' &= y \cdot \cos(\varphi) - z \cdot \sin(\varphi) \\z' &= y \cdot \sin(\varphi) + z \cdot \cos(\varphi) \\x' &= x\end{aligned}$$

bzw. durch Umstellen der Gleichungen in die gewohnte Form

$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= y \cdot \cos(\varphi) - z \cdot \sin(\varphi) \\z' &= y \cdot \sin(\varphi) + z \cdot \cos(\varphi)\end{aligned}$$

Analog lässt sich die Ansicht aus Abbildung 19 rechts gewinnen, indem man das Koordinatensystem aus Abbildung 19 Mitte gedachterweise von der positiven  $y$ -Achse aus betrachtet (auch eine Betrachtung aus Abbildung 19 links ist möglich, da es sich um dasselbe Koordinatensystem handelt). Es ergibt sich so ein weiteres zyklisches Vertauschen, d.h. aus dem obigen Zusammenhang für die Rotation um die  $x$ -Achse wird durch Ersetzen von  $x$  zu  $y$ ,  $y$  zu  $z$  und  $z$  zu  $x$  (und analog für  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$ )

$$\begin{aligned}y' &= y \\z' &= z \cdot \cos(\varphi) - x \cdot \sin(\varphi) \\x' &= z \cdot \sin(\varphi) + x \cdot \cos(\varphi)\end{aligned}$$

bzw. durch Umstellen der Gleichungen in die gewohnte Form

$$\begin{aligned}x' &= x \cdot \cos(\varphi) + z \cdot \sin(\varphi) \\y' &= y \\z' &= -x \cdot \sin(\varphi) + z \cdot \cos(\varphi)\end{aligned}$$

## Beweis der Rotationsinvarianz bestimmter Kreisgleichungen

Kreisgleichungen im  $\mathbb{R}^2$ , die ihren Mittelpunkt im Ursprung haben, sind gegenüber Drehungen um den Ursprung rotationsinvariant. Dies soll nachfolgend gezeigt werden. Es gilt dabei zu beachten, dass dies sowohl für aktive als auch für passive Drehungen gilt, wobei es – wie einleitend beschrieben – genügt, die Invarianz für passive Drehungen zu zeigen, da aktive Drehungen als passive mit negativem Drehwinkel dargestellt werden können (vgl. Abschnitt „Rotationen“).

Die Gleichung für Kreise mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius  $r$  lautet  $x^2 + y^2 = r^2$  bzw.  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ . Für einen beliebigen Drehwinkel  $\varphi$  gilt nun, basierend auf den Formalismen des Abschnittes „Gleichungstransformationen“

$$\begin{aligned}x' &= \cos(\varphi) \cdot x - \sin(\varphi) \cdot y \\y' &= \sin(\varphi) \cdot x + \cos(\varphi) \cdot y\end{aligned}$$

Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit  $\sin(\varphi)$  und der zweiten mit  $\cos(\varphi)$  erhält man

$$\begin{aligned}x' \cdot \sin(\varphi) &= \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \cdot x - \sin^2(\varphi) \cdot y \\y' \cdot \cos(\varphi) &= \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \cdot x + \cos^2(\varphi) \cdot y\end{aligned}$$

Subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten, erhält man

$$x' \cdot \sin(\varphi) - y' \cdot \cos(\varphi) = -y \cdot (\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi))$$

Da für alle  $\varphi$  gilt, dass  $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$ , lässt sich durch Vereinfachung und Umformung  $y$  ausdrücken:

$$y = y' \cdot \cos(\varphi) - x' \cdot \sin(\varphi)$$

Analog lässt sich eine Gleichung für  $x$  ermitteln: Multipliziert man die erste Ausgangsgleichung mit  $\cos(\varphi)$  und die zweite mit  $\sin(\varphi)$ , erhält man

$$\begin{aligned}x' \cdot \cos(\varphi) &= \cos^2(\varphi) \cdot x - \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \cdot y \\y' \cdot \sin(\varphi) &= \sin^2(\varphi) \cdot x + \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \cdot y\end{aligned}$$

Addiert man die beiden Gleichungen, erhält man

$$x' \cdot \cos(\varphi) - y' \cdot \sin(\varphi) = x \cdot \underbrace{(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))}_1$$

wodurch sich  $x$  ausdrücken lässt:

$$x = x' \cdot \cos(\varphi) - y' \cdot \sin(\varphi)$$

Die gewonnenen Ausdrücke für  $x$  und  $y$  lassen sich nun – wie im Abschnitt „Gleichungstransformationen“ erläutert – in die Kreisgleichung rückerzusetzen und ergeben damit die transformierte Kreisgleichung

$$F_t(x', y') = (x' \cdot \cos(\varphi) + y' \cdot \sin(\varphi))^2 + (y' \cdot \cos(\varphi) - x' \cdot \sin(\varphi))^2 - r^2 = 0$$

Das Ausmultiplizieren der Binome sowie das Streichen gleicher Ausdrücke unterschiedlichen Vorzeichens (zum Zwecke der Platzersparnis in einen Schritt zusammengefasst) liefert

$$F_t(x', y') = x'^2 \cdot \cos^2(\varphi) + y'^2 \cdot \sin^2(\varphi) + y'^2 \cdot \cos^2(\varphi) + x'^2 \cdot \sin^2(\varphi) - r^2 = 0$$

Zusammenfassen und Herausheben liefert

$$F_t(x', y') = x'^2 \cdot \underbrace{(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))}_1 + y'^2 \cdot \underbrace{(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))}_1 - r^2 = 0$$

und damit die ursprüngliche Gleichung  $F_t(x', y') = x'^2 + y'^2 - r^2 = 0$  bzw.  $x^2 + y^2 = r^2$ .

## Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich mich bei Thomas Renoth für die Richtigstellung der Matrizen zur aktiven und passiven Rotation um die x-Achse im  $\mathbb{R}^3$  und bei Achim Bernhard für die Hinweise auf Tippfehler bedanken. Weiterer Dank ergeht an Robert Merz für die Klarstellung der Orientierung der Koordinatensysteme sowie an Michael Gschwandtner und Martin Held für die Erläuterungen zur Herleitung der Matrix zur Rotation um die y-Achse.

## Matrizenübersicht

Nachstehend sind die Matrizen zur aktiven und passiven Spiegelung, Rotation, Translation und Skalierung im  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ , jeweils in homogenen Koordinaten, angegeben:

	<b>Spiegelung an Gerade</b>	<b>Rotation um Ursprung</b>
<b>Param.</b>	$\alpha$ : Winkel zw. Gerade/x-Achse	$\varphi$ : Rotationswinkel
<b>Aktiv</b>	$\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) & 0 \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
<b>Passiv</b>	$\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) & 0 \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
<b>Det.</b>	-1	1
<b>EW</b>	$\pm 1$ (je einfach)	$e^{\pm j\varphi}$ (je einfach) in $\mathbb{C}^2$
<b>EV</b>	$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \tan(\alpha) \end{pmatrix}$ für EW 1 und $\lambda \cdot \begin{pmatrix} -\tan(\alpha) \\ 1 \end{pmatrix}$ für EW -1	a.: $\mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \pm j \end{pmatrix}$ , p.: $\mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mp j \end{pmatrix}$
	<b>Translation</b>	<b>Skalierung</b>
<b>Param.</b>	$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$ : Translationsvektor	$a \neq 0$ : Skalierungsfaktor
<b>Aktiv</b>	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
<b>Passiv</b>	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
<b>Det.</b>	1	aktiv: $\frac{1}{a^2}$ , passiv: $a^2$
<b>EW</b>	- (nicht im $\mathbb{R}^2$ abbildbar)	$a$ (zweifach)
<b>EV</b>	- (nicht im $\mathbb{R}^2$ abbildbar)	Alle Vektoren des $\mathbb{R}^2$

Tabelle 2: Zusammenfassung der Matrizen zur aktiven und passiven Transformation im  $\mathbb{R}^2$  in homogenen Koordinaten und deren wichtigster Eigenschaften. Eigenwerte (EW) und Eigenvektoren (EV) beziehen sich auf die ursprünglichen Matrizen im  $\mathbb{R}^2$  (d.h. nicht auf jene in homogenen Koordinaten), so diese existieren.  $\alpha, \varphi, t_x, t_y, a \in \mathbb{R}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{C}$

	Spiegelung an yz-Ebene	Spiegelung an xz-Ebene
<b>Aktiv</b>	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
<b>Passiv</b>	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
<b>Det.</b>	-1	-1
<b>EW</b>	1 (zweifach) und -1 (einfach)	1 (zweifach) und -1 (einfach)
<b>EV</b>	$\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ für EW 1 und $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für EW -1	$\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}$ für EW 1 und $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ für EW -1
	Spiegelung an xy-Ebene	
<b>Aktiv</b>	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
<b>Passiv</b>	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
<b>Det.</b>	-1	
<b>EW</b>	1 (zweifach) und -1 (einfach)	
<b>EV</b>	$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}$ für EW 1 und $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für EW -1	

Tabelle 3: Zusammenfassung der Matrizen zur aktiven und passiven Spiegelung im  $\mathbb{R}^3$  in homogenen Koordinaten und deren wichtigster Eigenschaften. Eigenwerte (EW) und Eigenvektoren (EV) beziehen sich auf die ursprünglichen Matrizen im  $\mathbb{R}^3$  (d.h. nicht auf jene in homogenen Koordinaten).  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

	<b>Rotation um x-Achse</b> $\varphi$ : Rotationswinkel	<b>Rotation um y-Achse</b> $\varphi$ : Rotationswinkel
<b>Param.</b>		
<b>Aktiv</b>	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
<b>Passiv</b>	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
<b>Det.</b>	1	1
<b>EW</b>	$e^{\pm j\varphi}$ in $\mathbb{C}^3$ und 1 (je einfach)	$e^{\pm j\varphi}$ in $\mathbb{C}^3$ und 1 (je einfach)
<b>EV</b>	a: $\mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm j \end{pmatrix}$ , p: $\mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mp j \end{pmatrix}$ für EW $e^{\pm j\varphi}$ und $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für EW 1	a: $\mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm j \end{pmatrix}$ , p: $\mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mp j \end{pmatrix}$ für EW $e^{\pm j\varphi}$ und $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ für EW 1
<b>Param.</b>	<b>Rotation um z-Achse</b> $\varphi$ : Rotationswinkel	
<b>Aktiv</b>	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
<b>Passiv</b>	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
<b>Det.</b>	1	
<b>EW</b>	$e^{\pm j\varphi}$ in $\mathbb{C}^3$ und 1 (je einfach)	
<b>EV</b>	a: $\mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \pm j \\ 0 \end{pmatrix}$ , p: $\mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mp j \\ 0 \end{pmatrix}$ für EW $e^{\pm j\varphi}$ und $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für EW 1	

Tabelle 4: Zusammenfassung der Matrizen zur aktiven und passiven Rotation im  $\mathbb{R}^3$  in homogenen Koordinaten und deren wichtigster Eigenschaften. Eigenwerte (EW) und Eigenvektoren (EV) beziehen sich auf die ursprünglichen Matrizen im  $\mathbb{R}^3$  (d.h. nicht auf jene in homogenen Koordinaten).  $\varphi \in \mathbb{R}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{C}$

	<b>Translation</b>	<b>Skalierung</b>
<b>Param.</b>	$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$ : Translationsvektor	$a \neq 0$ : Skalierungsfaktor
<b>Aktiv</b>	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & 0 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 & -t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
<b>Passiv</b>	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
<b>Det.</b>	1	aktiv: $\frac{1}{a^3}$ , passiv: $a^3$
<b>EW</b>	– (nicht im $\mathbb{R}^3$ abbildbar)	$a$ (dreifach)
<b>EV</b>	– (nicht im $\mathbb{R}^3$ abbildbar)	Alle Vektoren des $\mathbb{R}^3$

Tabelle 5: Zusammenfassung der Matrizen zur aktiven und passiven Translation und Skalierung im  $\mathbb{R}^3$  in homogenen Koordinaten und deren wichtigster Eigenschaften. Eigenwerte (EW) und Eigenvektoren (EV) beziehen sich auf die ursprünglichen Matrizen im  $\mathbb{R}^3$  (d.h. nicht auf jene in homogenen Koordinaten), so diese existieren.  $t_x, t_y, t_z, a \in \mathbb{R}$