Aufgaben zu Affinen Koordinatentransformationen

Lösen Sie die nachfolgenden Aufgaben zur Klausurvorbereitung.

KT 01.

a) Kehren Sie die durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschriebene affine Transformation um, indem Sie deren Rücktransformation als Matrix angeben.

b) Geben Sie eine Formel für eine Matrix an, mit der die Rücktransformation aus a), M^{-1}, gefolgt von einer weiteren Transformation mit der Matrix X, insgesamt rückgängig gemacht, d.h. umgekehrt werden kann.

KT 02.

a) Geben Sie eine Transformationsmatrix an, die einen Punkt im $\mathbb{R}^2$ um drei Einheiten nach links (in negative x-Richtung) und um zwei Einheiten nach oben (in positive y-Richtung) verschiebt.

b) Wenden Sie die Matrix aus a) auf den Punkt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ an und geben Sie die Koordinaten des transformierten Punktes P' an.

KT 03.

a) Ein mit einem Punkt A im Ursprung liegendes rechtwinkliges Dreieck hat eine Fläche von sechs Quadrateinheiten und einen weiteren bekannten Punkt $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es soll proportional derart skaliert werden, dass sich sein Umfang verdoppelt. Wie lautet die Transformationsmatrix, die das bewerkstelligt?

b) Wie lauten die Koordinaten der skalierten Punkte nach Anwendung der Transformationsmatrix aus a)?

c) Wie groß ist der Flächeninhalt des skalierten Dreiecks aus b)?

KT 04.

a) Berechnen Sie die Eigenvektoren der Spiegelungsmatrix zur Spiegelung an der xy-Ebene im $\mathbb{R}^3$ zu allen positiven Eigenwerten.

b) Zeigen Sie, dass Rotationsmatrizen im $\mathbb{R}^2$ im Allgemeinen keine reellen Eigenwerte besitzen.

Lösungen (zur Überprüfung)

KT 01. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $M \cdot X^{-1}$

KT 02. a) $T_{homogen}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $P' = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

KT 03. a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, b) $A' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C' = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$, c) 24

KT 04. a) $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$