

Aufgabenblatt Kryptografie mit öffentl. Schlüsseln

Lösen Sie die nachfolgenden Aufgaben und bereiten Sie diese bis zum nächsten Lehrveranstaltungstermin vor.

LB-KÖS 00. (nicht abzugeben)

Schreiben Sie ein Programm unter Zuhilfenahme der *GMP*, das zwei als Argumente übergebene Zahlen multipliziert und das Ergebnis ausgibt. Überprüfen Sie Ihr Programm mit den Beispielzahlenpaaren $2\ 3$ und $x\ x$, wobei x die größtmögliche Zahl ist, die in einem vorzeichenbehafteten 32-Bit-Integer gespeichert werden kann.

Hinweis: Bauen Sie auf dem zur Verfügung gestellten Template für GMP auf.

LB-KÖS 01.

Die Verschlüsselung c einer Nachricht m mit dem öffentlichen Schlüssel (e, N) ist in RSA wie folgt definiert: $c \equiv m^e \pmod{N}$. Die Entschlüsselung mit dem privaten Schlüssel (d, N) ist analog wie folgt definiert: $m \equiv c^d \pmod{N}$.

Schreiben Sie ein Programm unter Zuhilfenahme der *GMP*, das eine Ver- oder Entschlüsselung mit RSA implementiert. Das Programm soll drei Parameter in der folgenden Reihenfolge entgegennehmen: die zu ver- bzw. entschlüsselnde Nachricht m als **Zahl**, einen Exponenten (e bzw. d) und den Modulus (N). Der ver- bzw. entschlüsselte Wert soll (**ohne** weitere Ausgaben) als Zahl auf `std::cout` ausgegeben werden. Verwenden Sie für Ihre Implementierung die Funktion `mpz_powm` und testen Sie diese mit $m = 7, e = 29, d = 85$ und $N = 391$. *Hinweis: Verwenden Sie die Methode `mpz_class::get_mpz_t`, um die Instanzen der `mpz_class`-Klasse an die Funktion `mpz_powm` zu übergeben. Details zu den GMP-Funktionen entnehmen Sie der Dokumentation unter <https://gmplib.org/manual/Function-Index.html#Function-Index>.*

LB-KÖS 02.

Ein RSA-Schlüsselpaar, bestehend aus dem öffentlichen Schlüssel (e, N) und dem privaten Schlüssel (d, N) kann wie folgt erzeugt werden:

1. Wählen Sie zwei voneinander verschiedene Primzahlen p und q , d.h. $p, q \in \mathbb{P}$, wobei $p \neq q$.
2. Berechnen Sie $N = pq$.
3. Berechnen Sie $\varphi(N) = (p - 1)(q - 1)$.
4. Wählen Sie für den öffentlichen Schlüssel eine ganze Zahl e zwischen 1 und $\varphi(N)$ (jeweils ohne die beiden Grenzen), die zu $\varphi(N)$ teilerfremd ist, d.h. $\text{ggT}(e, \varphi(N)) = 1$.

5. Berechnen Sie für den privaten Schlüssel d als die Inverse von e modulo $\varphi(N)$, d.h. $d \equiv e^{-1} \pmod{\varphi(N)}$.

Schreiben Sie ein Programm, das **keine** Parameter entgegennimmt, ein RSA-Schlüsselpaar wie oben angegeben erzeugt und den öffentlichen sowie den privaten Schlüssel nach **exakt** folgendem Muster (Groß-/Kleinschreibung, Leerzeichen, etc.) auf der Konsole ausgibt:

Public key: (29, 391)

Private key: (85, 391)

Verifizieren Sie die Schlüssel, indem Sie diese verwenden, um eine Nachricht mit Ihrem Programm aus LB-KÖS 01. zu ver- und wieder zu entschlüsseln. Die Schlüsselgröße (Bitlänge von N , die durch die Längen von p und q beeinflusst wird) soll mindestens 2.048 Bit betragen. Falls die Schlüssellänge nicht 2.048 Bit beträgt, muss ein neuer Schlüssel erzeugt werden. Erzeugen Sie gegebenenfalls so lange neue Schlüssel, bis die Mindestlänge erreicht ist.

Hinweis: Verwenden Sie die beiden Funktionen `gmp_randinit_default` und `gmp_randseed_ui`, um bei Programmstart einen Zufallszahlengenerator zu initialisieren. Erzeugen Sie mit diesem und der Funktion `mpz_urandomb` eine Zufallszahl und wenden Sie `mpz_nextprime` an, um eine Primzahl zu erhalten. Für die Bestimmung der Länge verwenden Sie die Funktion `mpz_sizeinbase`.

Für die Wahl von e iterieren Sie durch den angegebenen Wertebereich, bis Sie einen Wert gefunden haben, der das spezifizierte Kriterium erfüllt. Für die Berechnung des größten gemeinsamen Teilers verwenden Sie die Funktion `mpz_gcd`. Nutzen Sie für arithmetische und Vergleichsoperationen wo immer möglich die entsprechenden überladenen Operatoren, z.B. `+`, `<`, `==` etc.