Relevante Frequenztransformationen

Medientechnologie IL

Andreas Unterweger

Vertiefung Medieninformatik und Bildverarbeitung
Studiengang ITS
FH Salzburg

Sommersemester 2023

Überblick Frequenztransformationen I

- Was ist eine Transformation?
  - Alternative Repräsentation des Ursprungssignals
  - Hier: Zeit-Frequenz-Transformationen $\rightarrow$ Ursprungssignal ist zeitabhängig, transformiertes Signal ist frequenzabhängig
  - Rücktransformation möglich $\left(X \stackrel{T}{\rightarrow} Y \stackrel{T^{-1}}{\rightarrow} X\right)$
- Wofür Transformationen?
  - Eigenschaften im transformierten Signal leichter ablesbar als im Ursprungssignal (z.B. Gleichanteil)
  - Andere Eigenschaften im transformierten Signal ablesbar als im Ursprungssignal (z.B. Frequenzanteile)
  - Dekorrelation $\rightarrow$ Potenzial für Kompression

Überblick Frequenztransformationen II

- Kontinuierliche Transformationen (Integraltransformationen)
  - Bilden Funktionen auf Funktionen ab
  - Ursprungssignale sind kontinuierliche Funktionen
- **Diskrete Transformationen**
  - Bilden Folgen auf Folgen ab
  - Ursprungssignale sind Abtastfolgen (zeitdiskret!)
- Hier relevante Transformationen:
  - Diskrete Fouriertransformation (DFT)
  - Diskrete Cosinustransformation (DCT)
- Frequenzbegriff
  - Frequenz $\hat{f}$: Perioden pro Sekunde ($[\hat{f}] = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{Hz}$)
  - Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi\hat{f}$ ($[\omega] = \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$)
  - Faktoren in Transformation von verwendetem Frequenzbegriff abhängig

Diskrete Fouriertransformation I

- Ausgangspunkt: Kontinuierliche Fouriertransformation:

$$F(\hat{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi j\hat{f}t}dt$$

- Ursprungssignal ist (endliche) Folge von N (Abtast-)Werten
- Vereinfachte Annahme: $T = N$ (periodische Fortsetzung)
- Integral wird zu Summe ($dt \rightarrow \Delta t = \frac{T}{N} = \frac{N}{N} = 1$)

$$F(\hat{f}) = \sum_{t=0}^{N-1} f(t)e^{-2\pi j\hat{f}t}$$

Diskrete Fouriertransformation II

$$F(\hat{f}) = \sum_{t=0}^{N-1} f(t) e^{-2\pi j \hat{f} t}$$

- $\hat{f}_{max} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{1} = 1$ (Abtastfrequenz)
- $\Delta \hat{f} = \frac{\hat{f}_{max}}{N} = \frac{1}{N}$ (Abstand zwischen Frequenzen)
- $\hat{f}_k = k \Delta \hat{f} = \frac{k}{N}, k \in \{i \in \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq N-1\}$ (k-te Frequenz)

$$F(\hat{f}_k) = \sum_{t=0}^{N-1} f(t) e^{-\frac{2\pi jkt}{N}}$$

Diskrete Fouriertransformation III

$$F(\hat{f}_k) = \sum_{t=0}^{N-1} f(t) e^{-\frac{2\pi jkt}{N}}$$

- t ist diskret $\rightarrow$ $f(t)$ ist diskret
- k ist diskret $\rightarrow$ $F(\hat{f}_k)$ ist diskret

$\rightarrow$ Vereinfachte Notation für diskrete Werte:

  - $t \rightarrow n$, wobei $f(n) \rightarrow X_n$
  - $F(\hat{f}_k) \rightarrow Y_k$

$$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{-\frac{2\pi jkn}{N}}$$

Diskrete Fouriertransformation IV

- Analoger Ausgangspunkt für Rücktransformation:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\hat{f}) e^{2\pi j \hat{f} t} d\hat{f}$$

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{\frac{2\pi jkn}{N}} \Delta\hat{f}$$

- $\Delta\hat{f} = \frac{1}{N}$ (vgl. Folie 5)

$\rightarrow$ Normalisierung notwendig

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{\frac{2\pi jkn}{N}}$$

Diskrete Cosinustransformation I

- Eulersche Identität: $\forall x \in \mathbb{C} : e^{\pm jx} = \cos(x) \pm j \cdot \sin(x)$
- Ausgangspunkt DFT:

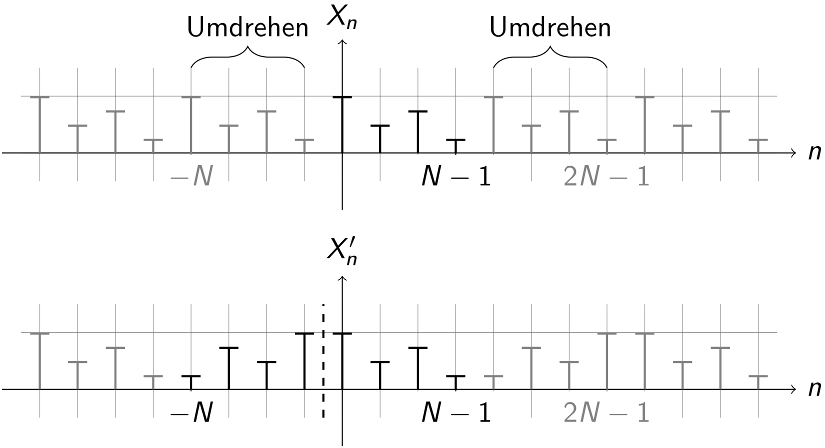
$$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{-\frac{2\pi jkn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \left(\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right)$$

- Wenn Summe reell (Ursprungssignal reell und gerade symmetrisch):

$$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

- Gerade Symmetrie wäre starke praktische Einschränkung $\rightarrow$ Kunstgriff

Diskrete Cosinustransformation II



$\rightarrow$ Neues Signal X'_n mit Länge $2N$ und Symmetrieachse $n = -\frac{1}{2}$

Einschub: Symmetriewahl und DCT-Varianten

- Wahl der Signalerweiterung eine von mehreren möglichen
- Wählbare Parameter:
    - Symmetrieachsenposition ($-\frac{1}{2}$ oder 0)
    - Symmetrie am Anfang der Fortsetzung (gerade oder ungerade)
    - Fortsetzungssymmetrieachsenposition ($N-1$ oder $N-\frac{1}{2}$)

$\rightarrow$ Acht Möglichkeiten (DCT-I bis DCT-VIII in der Literatur)

- Einschränkung: Symmetrie am Ende der Fortsetzung nicht wählbar (muss für DCT gerade sein; falls ungerade: DST (selten))
- „Übliche“ DCT: DCT-II mit den gezeigten Eigenschaften

Diskrete Cosinustransformation III

$$Y'_k = \sum_{n=-N}^{N-1} X'_n \cos\left(\frac{2\pi k\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2N}\right) = \sum_{n=-N}^{N-1} X'_n \cos\left(\frac{\pi k\left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}\right)$$

- X'_n lässt sich durch X_n definieren:

$$X'_n = \begin{cases} X_{-n-1} & , -N \leq n \leq -1 \\ X_n & , 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

- Summe entsprechend der stückweisen Definition aufteilen:

$$Y'_k = \sum_{n=-N}^{-1} X_{-n-1} \cos\left(\frac{\pi k\left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) + \sum_{n=0}^{N-1} X_n \cos\left(\frac{\pi k\left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}\right)$$

Diskrete Cosinustransformation IV

$$Y'_k = \underbrace{\sum_{n=-N}^{-1} X_{-n-1} \cos\left(\frac{\pi k \left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}\right)}_{A} + \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} X_n \cos\left(\frac{\pi k \left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}\right)}_{B}$$

$$\begin{aligned} A &= X_{N-1} \cos\left(\frac{\pi k\left(-N+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) + \cdots + X_0 \cos\left(\frac{\pi k\left(-\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \\ B &= X_0 \cos\left(\frac{\pi k \frac{1}{2}}{N}\right) + \cdots + X_{N-1} \cos\left(\frac{\pi k\left(N-\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \end{aligned}$$

- Cosinus ist gerade $\rightarrow$ Summanden von A entsprechen jenen von B

$\rightarrow$ $A = B \rightarrow Y'_k = 2B$

Diskrete Cosinustransformation V

$$Y'_k = 2\sum_{n=0}^{N-1} X_n \cos\left(\frac{\pi k\left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}\right), k \in \{x \in \mathbb{Z} \mid -N \leq x \leq N-1\}$$

- cos-Term für negative und positive k ident (da Cosinus gerade)
- $Y'_{-N} = Y'_N = 0$

$\rightarrow$ Negative Y'_k redundant $\rightarrow$ Positive Y'_k ausreichend

- Faktor 2 normiert Ergebnis (ohne Rücktransformation entbehrlich)

$$Y''_k = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \cos\left(\frac{\pi k\left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}\right), k \in \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq N-1\}$$

Diskrete Cosinustransformation VI

- Rücktransformation entspricht jener von Y'_k (nicht Y''_k!)
- Y'_k hat andere Symmetrie als X'_n

$\rightarrow$ Formel leicht unterschiedlich

- Analoger Ausgangspunkt: Rücktransformation der DFT
- Analoge Umwandlung wie auf Folie 8 $\rightarrow$ Rücktransformation DCT (für gerade Signale):

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

Diskrete Cosinustransformation VII

- Symmetrieachse von Y'_k bei $k = 0$ (Gesamtlänge $2N$)
- Bereich $-N$ bis $N-1$ $\rightarrow$ Mitte nicht bei 0 $\rightarrow$ Verschiebung um $-\frac{1}{2}$

$$X'_n = \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^{N-1} Y'_k \cos\left(\frac{2\pi k \left(n + \frac{1}{2}\right)}{2N}\right) = \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^{N-1} Y'_k \cos\left(\frac{\pi k \left(n + \frac{1}{2}\right)}{N}\right)$$

- Bekannte Symmetrien: $Y'_{-k} = Y'_k$, wobei $Y'_{-N} = 0$
- Übereinstimmende Summanden (Ausnahme Y'_0 tritt nur einmal auf)

$$X'_n = \frac{Y'_0}{2N} \cos\left(\frac{\pi 0 \left(n + \frac{1}{2}\right)}{N}\right) + \frac{2}{2N} \sum_{k=1}^{N-1} Y'_k \cos\left(\frac{\pi k \left(n + \frac{1}{2}\right)}{N}\right)$$

Diskrete Cosinustransformation VIII

$$X'_n = \frac{Y'_0}{2N} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} Y'_k \cos\left(\frac{\pi k \left(n + \frac{1}{2}\right)}{N}\right)$$

- Transformationsergebnis ist Y''_k, nicht Y'_k $\rightarrow$ Rückeinsetzen:
- $\forall i \in \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq N-1\} : Y'_i = 2Y''_i$

$$X'_n = \frac{2Y''_0}{2N} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} 2Y''_k \cos\left(\frac{\pi k \left(n + \frac{1}{2}\right)}{N}\right)$$

$$X'_n = \frac{Y''_0}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} Y''_k \cos\left(\frac{\pi k \left(n + \frac{1}{2}\right)}{N}\right)$$

Diskrete Cosinustransformation IX

$$X'_n = \frac{Y''_0}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} Y''_k \cos\left(\frac{\pi k \left(n + \frac{1}{2}\right)}{N}\right), n \in \{x \in \mathbb{Z} \mid -N \leq x \leq N-1\}$$

- X'_n ist künstlich fortgesetztes Signal
  - X'_n für $-N \leq n \leq -1$ ist X_n gespiegelt
  - X'_n für $0 \leq n \leq N-1$ ist X_n

$\rightarrow$ Beschränkung von n liefert Ursprungssignal:

$$X_n = \frac{Y''_0}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} Y''_k \cos\left(\frac{\pi k \left(n + \frac{1}{2}\right)}{N}\right), n \in \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq N-1\}$$

- Rücktransformationsformel entspricht DCT-III mit Faktor $\frac{2}{N}$

Zusammenfassung diskreter Transformationen

	Transformation T	**Rücktransformation** T^{-1}
DFT	$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{-\frac{2\pi jkn}{N}}$	$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{\frac{2\pi jkn}{N}}$
DCT	$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \cos\left(\frac{\pi k\left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}\right)$	$X_n = \frac{Y_0}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} Y_k \cos\left(\frac{\pi k\left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}\right)$

- Bei DCT keine Symmetrie der Formeln mehr (durch unterschiedliche Symmetrien von X_n und Y_k (in Herleitung Y_k''))
- Frequenzen der Basisfunktionen von DCT und DFT um Faktor 2 verschieden (bei Berechnung der Frequenzwerte zu beachten)

Praktische Aspekte diskreter Transformationen

- Rücktransformationen werden auch inverse Transformationen genannt

→ IDFT/IDCT: Zur DFT bzw. DCT gehörige Rücktransformation

- Schnelle („fast“) Algorithmen zur Berechnung verfügbar:
  - FFT (Fast DFT) und FCT (Fast DCT)
  - Komplexität $O(N \cdot \log(N))$ statt $O(N^2)$
  - Einschränkung: N muss Zweierpotenz sein
  - Auffüllen des Ursprungssignals mit Nullen möglich, um N anzupassen
- Einschränkungen/Vorteile der DCT gegenüber der DFT:
  - Alle auftretenden Terme sind reelle Zahlen

  → Komplett in $\mathbb{R}$ berechenbar

Danke für die Aufmerksamkeit!

Fragen?