

Relevante Frequenztransformationen

Medientechnologie IL

Andreas Unterweger

Vertiefung Medieninformatik und Bildverarbeitung
Studiengang ITS
FH Salzburg

Sommersemester 2024

- Was ist eine Transformation?
 - Alternative Repräsentation des Ursprungssignals
 - Hier: Zeit-Frequenz-Transformationen \rightarrow Ursprungssignal ist zeitabhängig, transformiertes Signal ist frequenzabhängig
 - Rücktransformation möglich $\left(X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{T^{-1}} X \right)$
- Wofür Transformationen?
 - Eigenschaften im transformierten Signal leichter ablesbar als im Ursprungssignal (z.B. Gleichanteil)
 - Andere Eigenschaften im transformierten Signal ablesbar als im Ursprungssignal (z.B. Frequenzanteile)
 - Dekorrelation \rightarrow Potenzial für Kompression

- Kontinuierliche Transformationen (Integraltransformationen)
 - Bilden Funktionen auf Funktionen ab
 - Ursprungssignale sind kontinuierliche Funktionen
- **Diskrete Transformationen**
 - Bilden Folgen auf Folgen ab
 - Ursprungssignale sind Abtastfolgen (zeitdiskret!)
- Hier relevante Transformationen:
 - Diskrete Fouriertransformation (DFT)
 - Diskrete Cosinustransformation (DCT)
- Frequenzbegriff
 - Frequenz \hat{f} : Perioden pro Sekunde ($[\hat{f}] = \frac{1}{s} = \text{Hz}$)
 - Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi\hat{f}$ ($[\omega] = \frac{\text{rad}}{s}$)
 - Faktoren in Transformation von verwendetem Frequenzbegriff abhängig

- Ausgangspunkt: Kontinuierliche Fouriertransformation:

$$F(\hat{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi j \hat{f} t} dt$$

- Ursprungssignal ist (endliche) Folge von N (Abtast-)Werten
- Vereinfachte Annahme: $T = N$ (periodische Fortsetzung)
- Integral wird zu Summe ($dt \rightarrow \Delta t = \frac{T}{N} = \frac{N}{N} = 1$)

$$F(\hat{f}) = \sum_{t=0}^{N-1} f(t) e^{-2\pi j \hat{f} t}$$

$$F(\hat{f}) = \sum_{t=0}^{N-1} f(t)e^{-2\pi j\hat{f}t}$$

- $\hat{f}_{max} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{1} = 1$ (Abtastfrequenz)
- $\Delta\hat{f} = \frac{\hat{f}_{max}}{N} = \frac{1}{N}$ (Abstand zwischen Frequenzen)
- $\hat{f}_k = k\Delta\hat{f} = \frac{k}{N}$, $k \in \{i \in \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq N - 1\}$ (k -te Frequenz)

$$F(\hat{f}_k) = \sum_{t=0}^{N-1} f(t)e^{-\frac{2\pi jkt}{N}}$$

$$F(\hat{f}_k) = \sum_{t=0}^{N-1} f(t) e^{-\frac{2\pi jkt}{N}}$$

- t ist diskret $\rightarrow f(t)$ ist diskret
- k ist diskret $\rightarrow F(\hat{f}_k)$ ist diskret

\rightarrow Vereinfachte Notation für diskrete Werte:

- $t \rightarrow n$, wobei $f(n) \rightarrow X_n$
- $F(\hat{f}_k) \rightarrow Y_k$

$$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{-\frac{2\pi jkn}{N}}$$

- Analoger Ausgangspunkt für Rücktransformation:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\hat{f}) e^{2\pi j \hat{f} t} d\hat{f}$$

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{\frac{2\pi j k n}{N}} \Delta \hat{f}$$

- $\Delta \hat{f} = \frac{1}{N}$ (vgl. Folie 5)

→ Normalisierung notwendig

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{\frac{2\pi j k n}{N}}$$

- Eulersche Identität: $\forall x \in \mathbb{C} : e^{\pm jx} = \cos(x) \pm j \cdot \sin(x)$
- Ausgangspunkt DFT:

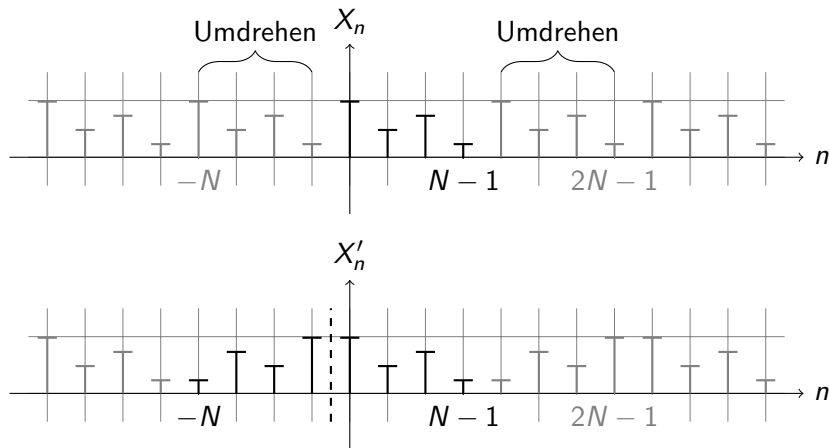
$$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{-\frac{2\pi jkn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \left(\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right)$$

- Wenn Summe reell (Ursprungssignal reell und gerade symmetrisch):

$$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

- Gerade Symmetrie wäre starke praktische Einschränkung \rightarrow Kunstgriff

Diskrete Cosinustransformation II



→ Neues Signal X'_n mit Länge $2N$ und Symmetrieachse $n = -\frac{1}{2}$

- Wahl der Signalerweiterung eine von mehreren möglichen
 - Wählbare Parameter:
 - Symmetrieachsenposition ($-\frac{1}{2}$ oder 0)
 - Symmetrie am Anfang der Fortsetzung (gerade oder ungerade)
 - Fortsetzungssymmetrieachsenposition ($N - 1$ oder $N - \frac{1}{2}$)
- Acht Möglichkeiten (DCT-I bis DCT-VIII in der Literatur)
- Einschränkung: Symmetrie am Ende der Fortsetzung nicht wählbar (muss für DCT gerade sein; falls ungerade: DST (selten))
 - „Übliche“ DCT: DCT-II mit den gezeigten Eigenschaften

$$Y'_k = \sum_{n=-N}^{N-1} X'_n \cos\left(\frac{2\pi k \left(n + \frac{1}{2}\right)}{2N}\right) = \sum_{n=-N}^{N-1} X'_n \cos\left(\frac{\pi k \left(n + \frac{1}{2}\right)}{N}\right)$$

- X'_n lässt sich durch X_n definieren:

$$X'_n = \begin{cases} X_{-n-1} & , -N \leq n \leq -1 \\ X_n & , 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

- Summe entsprechend der stückweisen Definition aufteilen:

$$Y'_k = \sum_{n=-N}^{-1} X_{-n-1} \cos\left(\frac{\pi k \left(n + \frac{1}{2}\right)}{N}\right) + \sum_{n=0}^{N-1} X_n \cos\left(\frac{\pi k \left(n + \frac{1}{2}\right)}{N}\right)$$

$$Y'_k = \underbrace{\sum_{n=-N}^{-1} X_{-n-1} \cos\left(\frac{\pi k \left(n + \frac{1}{2}\right)}{N}\right)}_A + \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} X_n \cos\left(\frac{\pi k \left(n + \frac{1}{2}\right)}{N}\right)}_B$$

$$A = X_{N-1} \cos\left(\frac{\pi k \left(-N + \frac{1}{2}\right)}{N}\right) + \dots + X_0 \cos\left(\frac{\pi k \left(-\frac{1}{2}\right)}{N}\right)$$

$$B = X_0 \cos\left(\frac{\pi k \frac{1}{2}}{N}\right) + \dots + X_{N-1} \cos\left(\frac{\pi k \left(N - \frac{1}{2}\right)}{N}\right)$$

- Cosinus ist gerade \rightarrow Summanden von A entsprechen jenen von B
 $\rightarrow A = B \rightarrow Y'_k = 2B$

$$Y'_k = 2 \sum_{n=0}^{N-1} X_n \cos \left(\frac{\pi k \left(n + \frac{1}{2} \right)}{N} \right), k \in \{x \in \mathbb{Z} \mid -N \leq x \leq N-1\}$$

- cos-Term für negative und positive k ident (da Cosinus gerade)
- $Y'_{-N} = Y'_N = 0$
- Negative Y'_k redundant → Positive Y'_k ausreichend
- Faktor 2 normiert Ergebnis (ohne Rücktransformation entbehrlich)

$$Y''_k = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \cos \left(\frac{\pi k \left(n + \frac{1}{2} \right)}{N} \right), k \in \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq N-1\}$$

- Rücktransformation entspricht jener von Y'_k (nicht Y''_k !)
 - Y'_k hat andere Symmetrie als X'_n
- Formel leicht unterschiedlich
- Analoges Ausgangspunkt: Rücktransformation der DFT
 - Analoge Umwandlung wie auf Folie 8 → Rücktransformation DCT (für gerade Signale):

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

- Symmetrieachse von Y'_k bei $k = 0$ (Gesamtlänge $2N$)
- Bereich $-N$ bis $N - 1 \rightarrow$ Mitte nicht bei $0 \rightarrow$ Verschiebung um $-\frac{1}{2}$

$$X'_n = \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^{N-1} Y'_k \cos\left(\frac{2\pi k \left(n + \frac{1}{2}\right)}{2N}\right) = \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^{N-1} Y'_k \cos\left(\frac{\pi k \left(n + \frac{1}{2}\right)}{N}\right)$$

- Bekannte Symmetrien: $Y'_{-k} = Y'_k$, wobei $Y'_{-N} = 0$
- Übereinstimmende Summanden (Ausnahme Y'_0 tritt nur einmal auf)

$$X'_n = \frac{Y'_0}{2N} \cos\left(\frac{\pi \cdot 0 \left(n + \frac{1}{2}\right)}{N}\right) + \frac{2}{2N} \sum_{k=1}^{N-1} Y'_k \cos\left(\frac{\pi k \left(n + \frac{1}{2}\right)}{N}\right)$$

$$X'_n = \frac{Y'_0}{2N} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} Y'_k \cos \left(\frac{\pi k (n + \frac{1}{2})}{N} \right)$$

- Transformationsergebnis ist Y''_k , nicht $Y'_k \rightarrow$ Rückeinsetzen:
- $\forall i \in \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq N - 1\} : Y'_i = 2Y''_i$

$$X'_n = \frac{2Y''_0}{2N} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} 2Y''_k \cos \left(\frac{\pi k (n + \frac{1}{2})}{N} \right)$$

$$X'_n = \frac{Y''_0}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} Y''_k \cos \left(\frac{\pi k (n + \frac{1}{2})}{N} \right)$$

$$X'_n = \frac{Y_0''}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} Y_k'' \cos\left(\frac{\pi k (n + \frac{1}{2})}{N}\right), n \in \{x \in \mathbb{Z} \mid -N \leq x \leq N-1\}$$

- X'_n ist künstlich fortgesetztes Signal
 - X'_n für $-N \leq n \leq -1$ ist X_n gespiegelt
 - X'_n für $0 \leq n \leq N-1$ ist X_n

→ Beschränkung von n liefert Ursprungssignal:

$$X_n = \frac{Y_0''}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} Y_k'' \cos\left(\frac{\pi k (n + \frac{1}{2})}{N}\right), n \in \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq N-1\}$$

- Rücktransformationsformel entspricht DCT-III mit Faktor $\frac{2}{N}$

Zusammenfassung diskreter Transformationen

	Transformation T	Rücktransformation T^{-1}
DFT	$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{-\frac{2\pi jkn}{N}}$	$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{\frac{2\pi jkn}{N}}$
DCT	$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \cos\left(\frac{\pi k(n+\frac{1}{2})}{N}\right)$	$X_n = \frac{Y_0}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} Y_k \cos\left(\frac{\pi k(n+\frac{1}{2})}{N}\right)$

- Bei DCT keine Symmetrie der Formeln mehr (durch unterschiedliche Symmetrien von X_n und Y_k (in Herleitung Y_k''))
- Frequenzen der Basisfunktionen von DCT und DFT um Faktor 2 verschieden (bei Berechnung der Frequenzwerte zu beachten)

- Rücktransformationen werden auch inverse Transformationen genannt
- IDFT/IDCT: Zur DFT bzw. DCT gehörige Rücktransformation
- Schnelle („fast“) Algorithmen zur Berechnung verfügbar:
 - FFT (Fast DFT) und FCT (Fast DCT)
 - Komplexität $O(N \cdot \log(N))$ statt $O(N^2)$
 - Einschränkung: N muss Zweierpotenz sein
 - Auffüllen des Ursprungssignals mit Nullen möglich, um N anzupassen
- Einschränkungen/Vorteile der DCT gegenüber der DFT:
 - Alle auftretenden Terme sind reelle Zahlen
 - Komplet in \mathbb{R} berechenbar

Fragen?