Affine Koordinatentransformationen

Medieninformatik IL

Andreas Unterweger

Vertiefung Medieninformatik
Studiengang ITS
FH Salzburg

Wintersemester 2016/17

Überblick: Affine Koordinatentransformationen

- Was ist eine Koordinatentransformation?
  - Änderung der Koordinaten eines (geometrischen) Objektes
  - Aktive vs. passive Transformationen
- Was ist Affinität (leicht vereinfacht)?
  - Erhält Seitenverhältnisse
  - Erhält Parallelität
- Wofür affine Koordinatentransformationen?
  - Elementare, kombinierbare Veränderungsoperationen
  - Basis für komplexere Veränderungsoperationen
- Affine Koordinatentransformationen: **Spiegelung, Rotation, Translation, Skalierung**, Scherung
- Beschränkung: Rechtshändige Koordinatensysteme (im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$)

Wiederholung: Matrizenrechnung

- Matrix mit m Zeilen und n Spalten reeller Koeffizienten: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
  - Koeffizienten $a_{i,j} \in \mathbb{R}, i \in \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq m\}, j \in \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq n\}$
  - Einheitsmatrix $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (quadratisch) mit $a_{i,j} = \delta_{i,j}$, sodass $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \cdot E = E \cdot A = A$
- Rechenoperationen
  - Addition und Subtraktion (elementweise)
  - Multiplikation (assoziativ, aber nicht kommutativ)
  - Inverse zu A (keine Division!): A^{-1}, sodass $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$
  - Determinante (nur quadratische Matrizen): $det(A) : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$
- Weitere relevante Konzepte
  - Eigenwerte
  - Eigenvektoren

Transformationen als Matrizen I

- Gegeben: Ein Punkt P im $\mathbb{R}^n$
- Gesucht: Der transformierte Punkt P' in Abhängigkeit von P
- Bekannt: Zusammenhang zwischen alten und neuen Koordinaten
- Beispiel: $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit Spiegelung an x-Achse $\rightarrow P' = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' &= 0 \cdot x - 1 \cdot y \end{aligned}$$

Transformationen als Matrizen II

$$
\begin{aligned}
x' &= 1 \cdot x + 0 \cdot y \\
y' &= 0 \cdot x - 1 \cdot y
\end{aligned}
$$

- Idee: Zusammenhang zwischen Koordinaten als Matrix anschreiben:

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{T} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

$$
P' = T \cdot P
$$

- (Transformations-)Matrix T transformiert P in P'

Transformationen als Matrizen III

- Vorteile durch Transformationen als Matrizen
  - Einfach zu implementieren
  - Relativ schnell (vor allem bei komplexeren Zusammenhängen)
  - Matrizenoperationen erlauben Umkehr und Kombination
- Umkehrbarkeit von Transformationen:

$$P' = T \cdot P \rightarrow P = T^{-1} \cdot P'$$

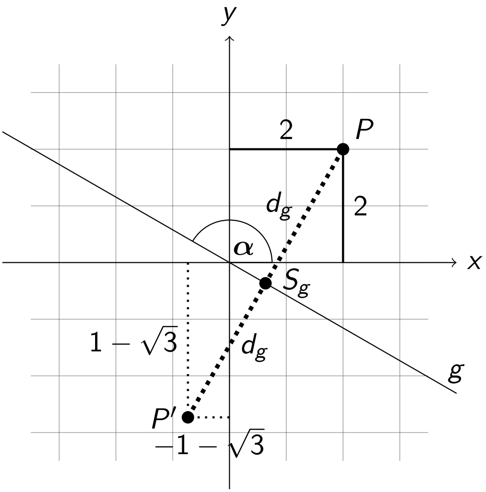
- Hintereinanderausführung von Transformationen (erst T_1, dann T_2):

$$P'' = (T_2 \cdot T_1) \cdot P = T_2 \cdot (\underbrace{T_1 \cdot P}_{P'}) = T_2 \cdot P' = P''$$

- Standardnotation für passive Transformationen: T^{-1} statt T

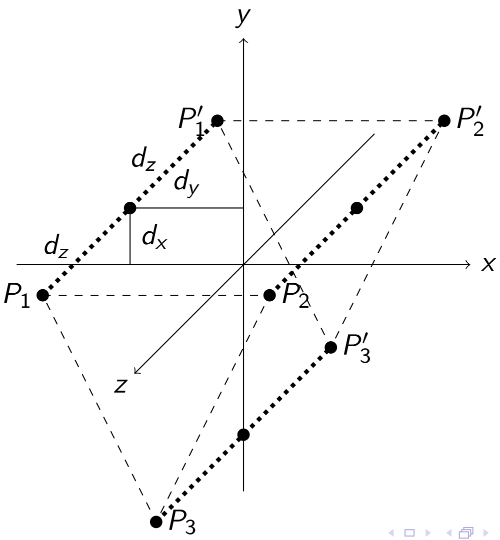
Spiegelung an einer Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^2$

- Winkel zwischen Gerade und x-Achse: $\alpha = 150^\circ$ (Freiheitsgrad)



Spiegelung an einer Ebene im $\mathbb{R}^3$

- Ebene ist x-y-Ebene



Spiegelungsmatrizen im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

$$S_{2D}^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(2\alpha) & sin(2\alpha) \\ sin(2\alpha) & -cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

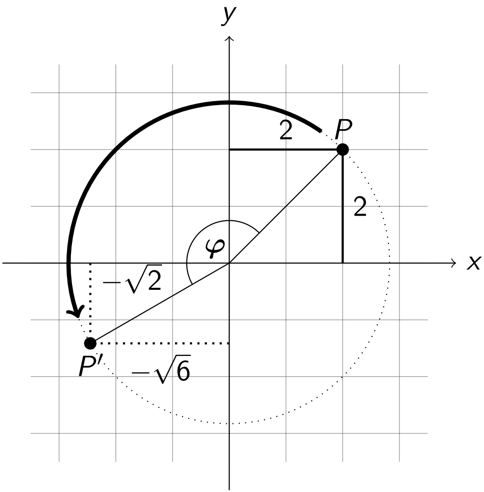
$$S_{3D_{xy}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_{3D_{xz}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{3D_{yz}}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

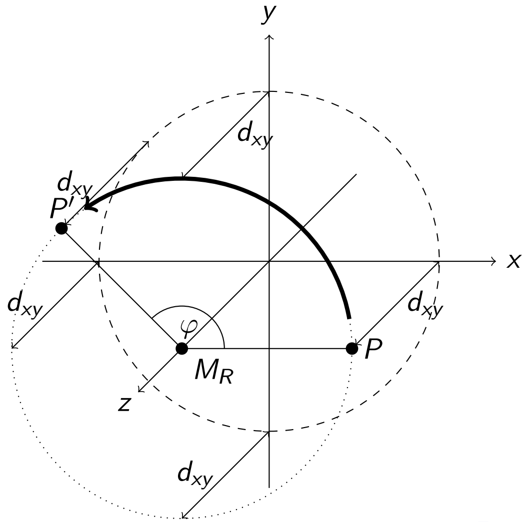
Rotation um den Ursprung im $\mathbb{R}^2$

- Rotationswinkel $\varphi = 165°$ (Freiheitsgrad)



Rotation um eine Koordinatenachse im $\mathbb{R}^3$

- Rotationswinkel $\varphi = 135°$ (Freiheitsgrad) um die z-Achse



Rotationsmatrizen im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

$$R_{2D}^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$R_{3D_x}^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ 0 & sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

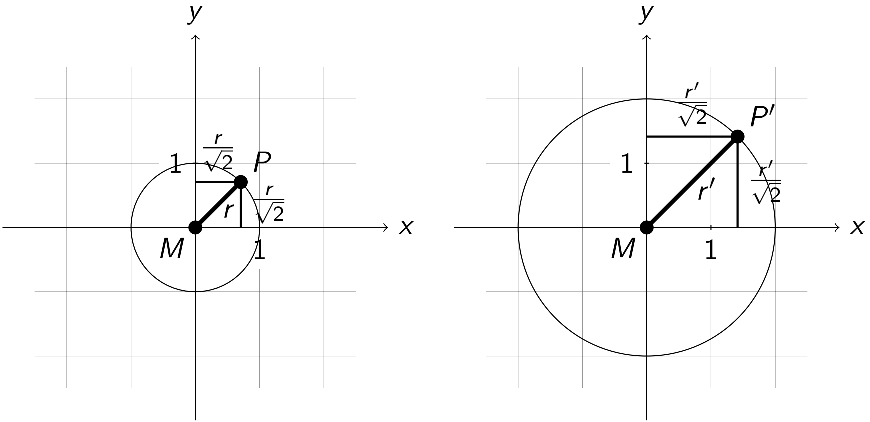
$$R_{3D_y}^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & 0 & sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\varphi) & 0 & cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$R_{3D_z}^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) & 0 \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Rotationen um verschiedene Achsen sind voneinander **unabhängig**

Skalierung im $\mathbb{R}^2$

- Skalierungsfaktor $a = 2$ (Freiheitsgrad)



Skalierungsmatrizen im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

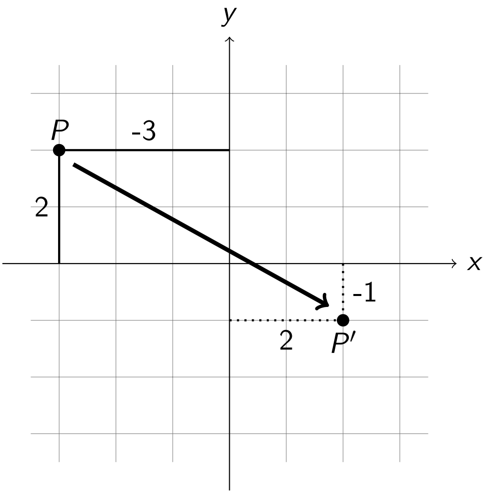
$$Z_{2D}^{-1}(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \neq 0$$

$$Z_{3D}^{-1}(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, a \neq 0$$

- Wichtiger Sonderfall: Die Multiplikation von Skalierungsmatrizen **ist** kommutativ (nicht mit beliebigen anderen Matrizen kombinierbar!)

Translation im $\mathbb{R}^2$

- Verschiebungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ (**zwei** Freiheitsgrade)



Einschub: Homogene Koordinaten I

- Problem: Verschiebung nicht durch gezeigte Matrizenmultiplikationen abbildbar (neue Koordinaten sind **immer** von alten abhängig)
- Lösung: Homogene Koordinaten (zusätzliche Dimension, deren Werte immer konstant sind $\rightarrow$ koordinatenunabhängige Änderung möglich)

$$T^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x' &= 1 \cdot x + 0 \cdot y + 5 \cdot 1 = x + 5 \\ y' &= 0 \cdot x + 1 \cdot y - 3 \cdot 1 = y - 3 \\ 1 &= 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Einschub: Homogene Koordinaten II

- Zusätzliche Dimension vergrößert Matrix $\rightarrow$ Dimension der Punkte muss angepasst werden (**vereinfacht**):
  - Vor der Transformation Dimension hinzufügen (Wert 1)

$$P = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow P_{homogen} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  - Nach der Transformation Dimension entfernen (Wert 1)

$$P'_{homogen} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow P' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Analog im $\mathbb{R}^3$: Vier Dimensionen in homogenen Koordinaten

Translationsmatrizen im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

$$T_{2D}^{-1}(t_x, t_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{3D}^{-1}(t_x, t_y, t_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Wichtiger Sonderfall: Die Multiplikation von Translationsmatrizen **ist** kommutativ (nicht mit beliebigen anderen Matrizen kombinierbar!)
- **n** Freiheitsgrade im $\mathbb{R}^n$

Verkettung von Transformationsmatrizen

- Ausschließlich nicht homogene Matrizen: Einfache Multiplikation
- Ausschließlich homogene Matrizen: Einfache Multiplikation
- Mischung von homogenen und nicht homogenen Matrizen: Nicht homogene Matrizen homogen machen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow A_{homogen} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Achtung: Reihenfolge bei Umkehr der Verkettung ebenso umkehren:

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1} \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_{n-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$$

Danke für die Aufmerksamkeit!

Fragen?