

Affine Koordinatentransformationen

Medieninformatik IL

Andreas Unterweger

Vertiefung Medieninformatik
Studiengang ITS
FH Salzburg

Wintersemester 2020/21

- Was ist eine Koordinatentransformation?
 - Änderung der Koordinaten eines (geometrischen) Objektes
 - Aktive vs. passive Transformationen
- Was ist Affinität (leicht vereinfacht)?
 - Erhält Seitenverhältnisse
 - Erhält Parallelität
- Wofür affine Koordinatentransformationen?
 - Elementare, kombinierbare Veränderungsoperationen
 - Basis für komplexere Veränderungsoperationen
- Affine Koordinatentransformationen: **Spiegelung, Rotation, Translation, Skalierung**, Scherung
- Beschränkung: Rechtshändige Koordinatensysteme (im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3)

- Matrix mit m Zeilen und n Spalten reeller Koeffizienten: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
 - Koeffizienten $a_{i,j} \in \mathbb{R}, i \in \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq m\}, j \in \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq n\}$
 - Einheitsmatrix $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (quadratisch) mit $a_{i,j} = \delta_{i,j}$, sodass
 $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \cdot E = E \cdot A = A$
- Rechenoperationen
 - Addition und Subtraktion (elementweise)
 - Multiplikation (assoziativ, aber nicht kommutativ)
 - Inverse zu A (keine Division!): A^{-1} , sodass $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$
 - Determinante (nur quadratische Matrizen): $\det(A) : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$
- Weitere relevante Konzepte
 - Eigenwerte
 - Eigenvektoren

Transformationen als Matrizen I

- Gegeben: Ein Punkt P im \mathbb{R}^n
- Gesucht: Der transformierte Punkt P' in Abhängigkeit von P
- Bekannt: Zusammenhang zwischen alten und neuen Koordinaten
- Beispiel: $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit Spiegelung an x-Achse $\rightarrow P' = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$x' = x$$

$$y' = -y$$

$$x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y$$

$$y' = 0 \cdot x - 1 \cdot y$$

$$x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y$$

$$y' = 0 \cdot x - 1 \cdot y$$

- Idee: Zusammenhang zwischen Koordinaten als Matrix anschreiben:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P' = T \cdot P$$

- (Transformations-)Matrix T transformiert P in P'

- Vorteile durch Transformationen als Matrizen
 - Einfach zu implementieren
 - Relativ schnell (vor allem bei komplexeren Zusammenhängen)
 - Matrizenoperationen erlauben Umkehr und Kombination
- Umkehrbarkeit von Transformationen:

$$P' = T \cdot P \rightarrow P = T^{-1} \cdot P'$$

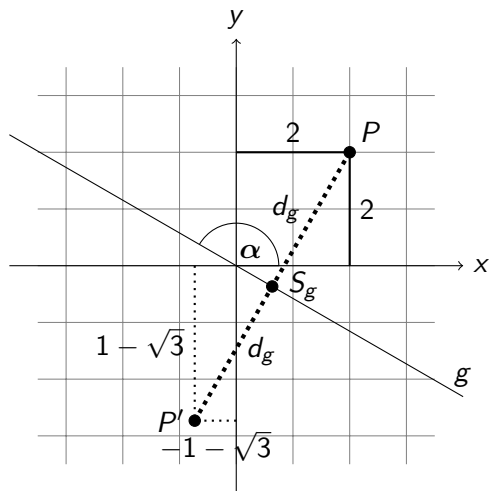
- Hintereinanderausführung von Transformationen (erst T_1 , dann T_2):

$$P'' = (T_2 \cdot T_1) \cdot P = T_2 \cdot \underbrace{(T_1 \cdot P)}_{P'} = T_2 \cdot P' = P''$$

- Standardnotation für passive Transformationen: T^{-1} statt T

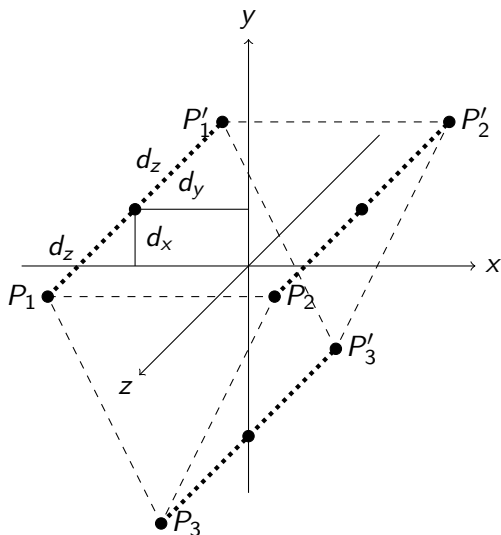
Spiegelung an einer Ursprungsgeraden im \mathbb{R}^2

- Winkel zwischen Gerade und x-Achse: $\alpha = 150^\circ$ (Freiheitsgrad)



Spiegelung an einer Ebene im \mathbb{R}^3

- Ebene ist x-y-Ebene



$$S_{2D}^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

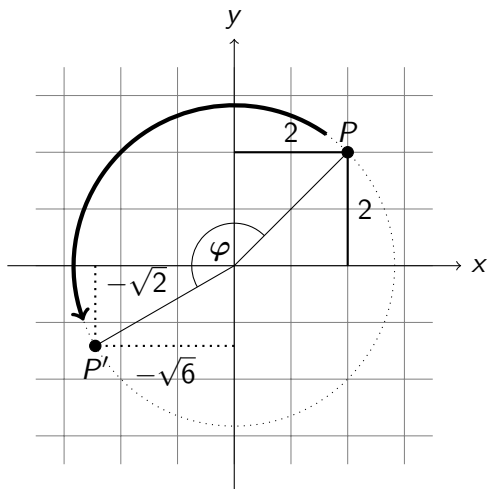
$$S_{3D_{xy}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_{3D_{xz}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{3D_{yz}}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

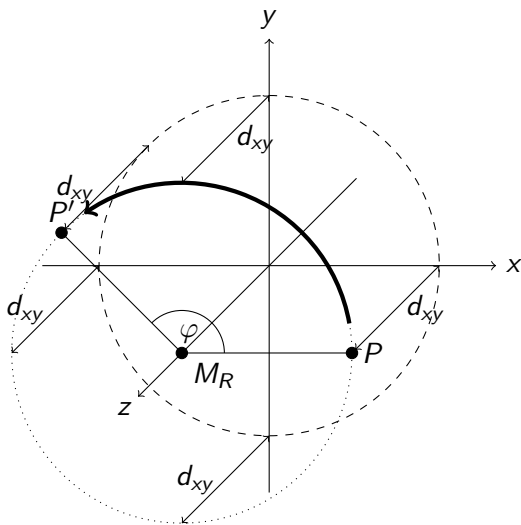
Rotation um den Ursprung im \mathbb{R}^2

- Rotationswinkel $\varphi = 165^\circ$ (Freiheitsgrad)



Rotation um eine Koordinatenachse im \mathbb{R}^3

- Rotationswinkel $\varphi = 135^\circ$ (Freiheitsgrad) um die z-Achse



$$R_{2D}^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$R_{3D_x}^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

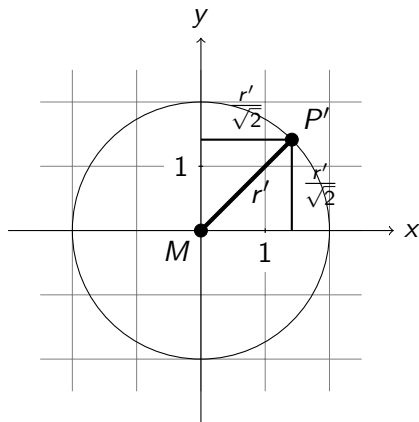
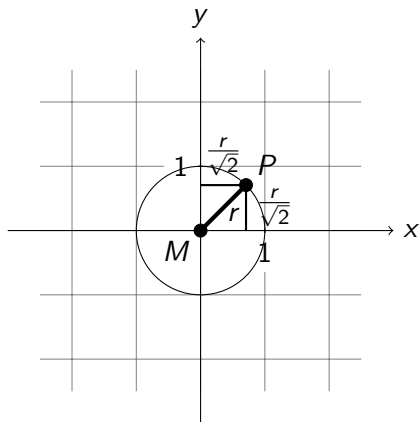
$$R_{3D_y}^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$R_{3D_z}^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Rotationen um verschiedene Achsen sind voneinander **unabhängig**

Skalierung im \mathbb{R}^2

- Skalierungsfaktor $a = 2$ (Freiheitsgrad)



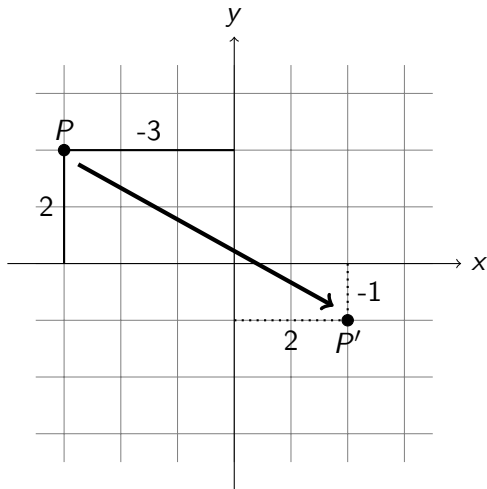
$$Z_{2D}^{-1}(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \neq 0$$

$$Z_{3D}^{-1}(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, a \neq 0$$

- Wichtiger Sonderfall: Die Multiplikation von Skalierungsmatrizen **ist** kommutativ (nicht mit beliebigen anderen Matrizen kombinierbar!)

Translation im \mathbb{R}^2

- Verschiebungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ (**zwei** Freiheitsgrade)



Einschub: Homogene Koordinaten I

- Problem: Verschiebung nicht durch gezeigte Matrizenmultiplikationen abbildbar (neue Koordinaten sind **immer** von alten abhängig)
- Lösung: Homogene Koordinaten (zusätzliche Dimension, deren Werte immer konstant sind → koordinatenunabhängige Änderung möglich)

$$T^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y + 5 \cdot 1 = x + 5$$

$$y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y - 3 \cdot 1 = y - 3$$

$$1 = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1 = 1$$

- Zusätzliche Dimension vergrößert Matrix \rightarrow Dimension der Punkte muss angepasst werden (**vereinfacht**):
 - Vor der Transformation Dimension hinzufügen (Wert 1)

$$P = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow P_{homogen} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Nach der Transformation Dimension entfernen (Wert 1)

$$P'_{homogen} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow P' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Analog im \mathbb{R}^3 : Vier Dimensionen in homogenen Koordinaten

$$T_{2D}^{-1}(t_x, t_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{3D}^{-1}(t_x, t_y, t_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Wichtiger Sonderfall: Die Multiplikation von Translationsmatrizen **ist** kommutativ (nicht mit beliebigen anderen Matrizen kombinierbar!)
- n Freiheitsgrade im \mathbb{R}^n

Verkettung von Transformationsmatrizen

- Ausschließlich nicht homogene Matrizen: Einfache Multiplikation
- Ausschließlich homogene Matrizen: Einfache Multiplikation
- Mischung von homogenen und nicht homogenen Matrizen: Nicht homogene Matrizen homogen machen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow A_{\text{homogen}} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

- Achtung: Reihenfolge bei Umkehr der Verkettung ebenso umkehren:

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1} \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_{n-1}^{-1} \cdot \dots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$$

Fragen?