# Übersicht Transformationsmatrizen

Nachstehend sind die Matrizen zur passiven Spiegelung, Rotation, Translation und Skalierung im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sowie zur vereinfachten Projektion vom $\mathbb{R}^3$ in den $\mathbb{R}^2$, jeweils in homogenen Koordinaten, angegeben:

| | **Spiegelung an Ursprungsgerade** | **Rotation um Ursprung** |
|---|---|---|
| **Parameter** | $\alpha$: Winkel zwischen Gerade und x-Achse | $\varphi$: Rotationswinkel |
| **Matrix** | $\begin{pmatrix} cos(2\alpha) & sin(2\alpha) & 0 \\ sin(2\alpha) & -cos(2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) & 0 \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **Determinante** | $-1$ | 1 |
| **Eigenwerte** | $\pm 1$ (je einfach) | – *(nicht im $\mathbb{R}^2$ berechenbar)* |
| **Eigenvektoren** | $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ tan(\alpha) \end{pmatrix}$ für Eigenwert 1 und $\lambda \cdot \begin{pmatrix} -tan(\alpha) \\ 1 \end{pmatrix}$ für Eigenwert $-1$ | – *(nicht im $\mathbb{R}^2$ berechenbar)* |

| | **Translation** | **Skalierung** |
|---|---|---|
| **Parameter** | $\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$: Translationsvektor | $a \neq 0$: Skalierungsfaktor |
| **Matrix** | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **Determinante** | 1 | $a^2$ |
| **Eigenwerte** | – *(nicht im $\mathbb{R}^2$ abbildbar)* | $a$ (zweifach) |
| **Eigenvektoren** | – *(nicht im $\mathbb{R}^2$ abbildbar)* | Alle Vektoren des $\mathbb{R}^2$ |

Tabelle 1: Zusammenfassung der Matrizen zur passiven Transformation im $\mathbb{R}^2$ in homogenen Koordinaten und deren wichtigster Eigenschaften. Eigenwerte und Eigenvektoren beziehen sich auf die ursprünglichen Matrizen im $\mathbb{R}^2$ (d.h. nicht auf jene in homogenen Koordinaten), so diese dort abbildbar sind. $\alpha, \varphi, t_x, t_y, a, \lambda \in \mathbb{R}$

| | Spiegelung an yz-Ebene | Spiegelung an xz-Ebene | Spiegelung an xy-Ebene |
|---|---|---|---|
| **Matrix** | $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **Determinante** | $-1$ | $-1$ | $-1$ |
| **Eigenwerte** | 1 (zweifach) und $-1$ (einfach) | 1 (zweifach) und $-1$ (einfach) | 1 (zweifach) und $-1$ (einfach) |
| **Eigenvektoren** | $\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ für Eigenwert 1 und $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für Eigenwert $-1$ | $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}$ für Eigenwert 1 und $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ für Eigenwert $-1$ | $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}$ für Eigenwert 1 und $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für Eigenwert $-1$ |

Tabelle 2: Zusammenfassung der Matrizen zur passiven Spiegelung im $\mathbb{R}^3$ in homogenen Koordinaten und deren wichtigster Eigenschaften. Eigenwerte und Eigenvektoren beziehen sich auf die ursprünglichen Matrizen im $\mathbb{R}^3$ (d.h. nicht auf jene in homogenen Koordinaten). $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

| | Rotation um x-Achse | Rotation um y-Achse | Rotation um z-Achse |
|---|---|---|---|
| **Parameter** | $\varphi$: Rotationswinkel | $\varphi$: Rotationswinkel | $\varphi$: Rotationswinkel |
| **Matrix** | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\varphi) & -sin(\varphi) & 0 \\ 0 & sin(\varphi) & cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} cos(\varphi) & 0 & sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin(\varphi) & 0 & cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) & 0 & 0 \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **Determinante** | 1 | 1 | 1 |
| **Eigenwerte** | 1 (einfach) | 1 (einfach) | 1 (einfach) |
| **Eigenvektoren** | $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für Eigenwert 1 | $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ für Eigenwert 1 | $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für Eigenwert 1 |

Tabelle 3: Zusammenfassung der Matrizen zur passiven Rotation im $\mathbb{R}^3$ in homogenen Koordinaten und deren wichtigster Eigenschaften. Eigenwerte und Eigenvektoren beziehen sich auf die ursprünglichen Matrizen im $\mathbb{R}^3$ (d.h. nicht auf jene in homogenen Koordinaten). $\varphi, \lambda \in \mathbb{R}$

| | **Translation** | **Skalierung** |
|---|---|---|
| **Parameter** | $\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$: Translationsvektor | $a \neq 0$: Skalierungsfaktor |
| **Matrix** | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **Determinante** | 1 | $a^3$ |
| **Eigenwerte** | – *(nicht im $\mathbb{R}^3$ abbildbar)* | $a$ (dreifach) |
| **Eigenvektor** | – *(nicht im $\mathbb{R}^3$ abbildbar)* | Alle Vektoren des $\mathbb{R}^3$ |

Tabelle 4: Zusammenfassung der Matrizen zur passiven Translation und Skalierung im $\mathbb{R}^3$ in homogenen Koordinaten und deren wichtigster Eigenschaften. Eigenwerte und Eigenvektoren beziehen sich auf die ursprünglichen Matrizen im $\mathbb{R}^3$ (d.h. nicht auf jene in homogenen Koordinaten), so diese dort abbildbar sind. $t_x, t_y, t_z, a \in \mathbb{R}$

| | **Projektion (vereinfacht)** |
|---|---|
| **Parameter** | $f_x \neq 0, f_y \neq 0$: Brennweiten |
| **Matrix** | $\begin{pmatrix} f_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **Determinante** | – *(nicht quadratisch)* |
| **Eigenwerte** | – *(nicht quadratisch)* |
| **Eigenvektor** | – *(nicht quadratisch)* |

Tabelle 5: Zusammenfassung der Matrizen zur vereinfachten Projektion vom $\mathbb{R}^3$ in den $\mathbb{R}^2$ in homogenen Koordinaten und deren wichtigster Eigenschaften. Eigenwerte und Eigenvektoren beziehen sich auf die ursprünglichen Matrizen im $\mathbb{R}^3$ (d.h. nicht auf jene in homogenen Koordinaten), so diese dort abbildbar sind. $f_x, f_y \in \mathbb{R}$