Laborprotokoll SSY Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei weißem Rauschen

Daniel Schrenk, Andreas Unterweger

Einleitung

Ziel der Übung

In dieser Laborübung sollte die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Übertragung von Signalen über eine Leitung ein Fehler durch Rauschen auftritt, ermittelt werden. Die gemessenen Werte sollten anschließend mit den theoretisch berechneten verglichen werden.

Hintergrund

Bei der Übertragung von Signalen über eine Leitung können durch Rauschen Bitfehler auftreten. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein solcher Fehler auftritt (nachstehende Formel bezieht sich auf ein unipolares Signal), lässt sich nach folgender Formel berechnen (Herleitung siehe Vorlesungsskriptum, soll hier nicht weiter erläutert werden):

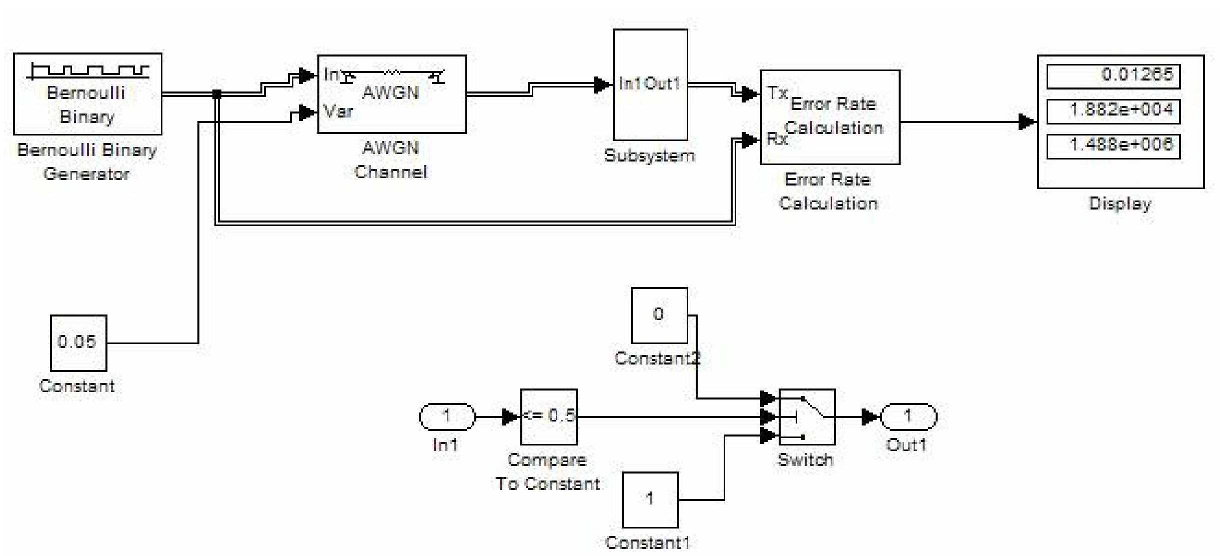
$$P_e = \frac{1}{2} erfc(\frac{s_d}{2\sqrt{2}\sigma})$$

Erfc ist dabei die sogenannte „Errorfunction" – eine Funktion, die analytisch nicht integrierbar ist, durch MATLAB allerdings mit einer sehr guten Näherung berechnet werden kann. S_d ist der Signalpegel des binären „1ers" (z.B. 1 wie in der ersten Übung angenommen).
Der maximal auftretende Fehler kann hier maximal 0,5 sein – bedingt einerseits durch den Faktor ½ vor der Errorfunction, andererseits durch die Tatsache, dass 100% Fehler bedeuten würde, dass man das Signal durch Invertieren der Signalzustände (0 → 1, 1 → 0) wieder rückgewinnen könnte. Für Signale mit mehreren Zuständen sieht die Errorfunction etwas anders aus – mehr hierzu in 2.2

Aufgabenstellungen

2.1 Verrauschtes unipolares Rechteckssignal

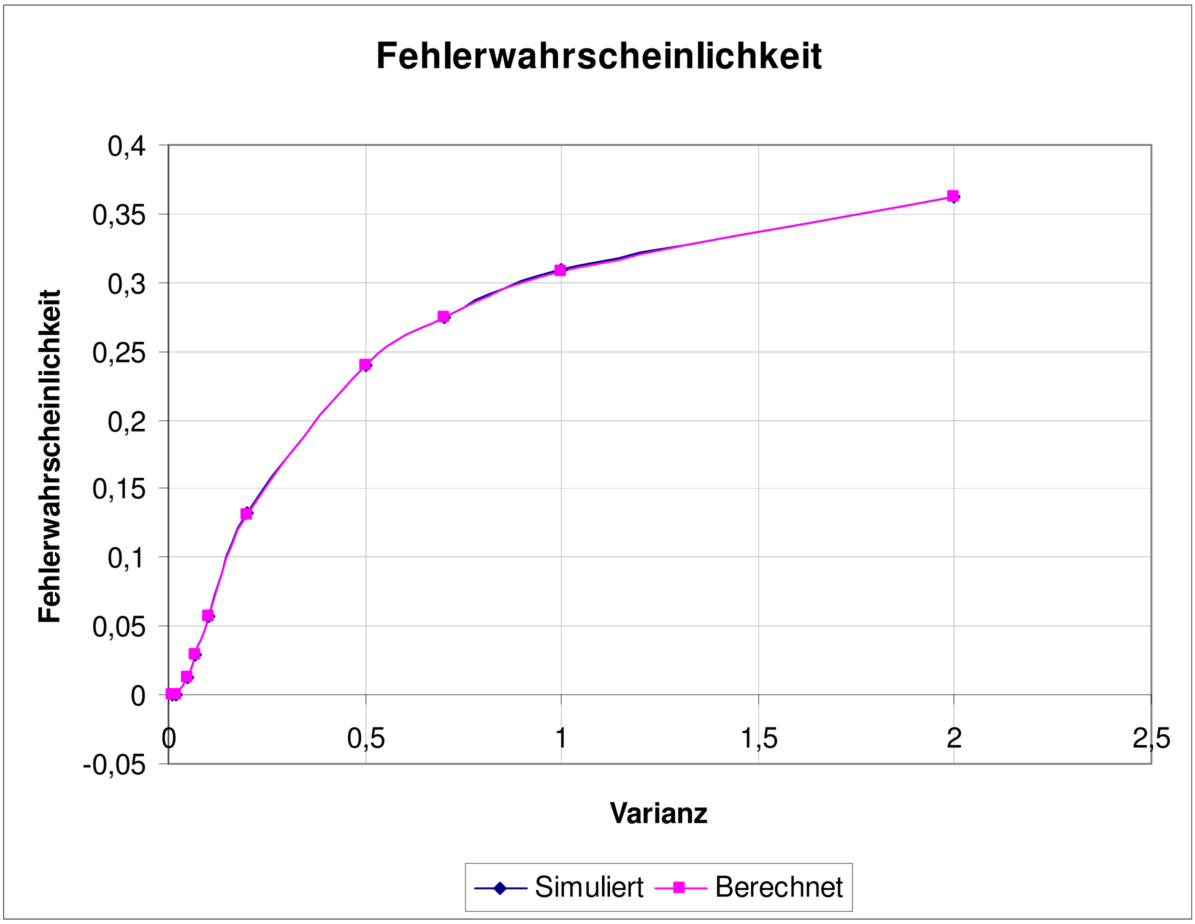
In dieser Übung sollte der Einfluss der Varianz (des Rauschens) auf die Anzahl der Bitfehler untersucht und mit dem theoretisch berechneten Wert (laut Formel) verglichen werden.



Die Schaltung besteht prinzipiell aus einem sogenannten Bernoulli Binay Generator, einem Generator, der (analog zum NRZ-Generator in der letzten Übung) Rechteckimpulsfolgen erzeugt.
Der AWGN (Add white gaussian noise) entspricht einem Übertragungskanal, auf dem Rauschen auftritt. Die Varianz des Rauschens kann mit dem links unten sichtbaren „Constant" geregelt werden (vgl. Tabelle unten).
Das „Subsystem" vereint einige Bauelemente (sichtbar unten im Bild), die prinzipiell die Wiedergewinnung des Signals aus dem Rauschkanal simulieren (dabei gilt: ist der Wert des Signals < 0,5 wird der Signalwert als 0 interpretiert, ansonsten als 1). An dieser Stelle kann nun auch der Fehler berechnet werden, der bei der Übertragung bzw. Rückgewinnung aufgetreten ist. In Punkt 2.2 wird dies näher erläutert.
Das Display hatte nur die Funktion, die von der „Error Rate Calculation"-Komponente berechnete Fehlerrate auszugaben, zusätzlich zur Anzahl der Bitfehler und der Anzahl der übertragenen Bits.
Die folgende Tabelle zeigt den Einfluss der Varianz des Rauschens auf die Fehlerrate:

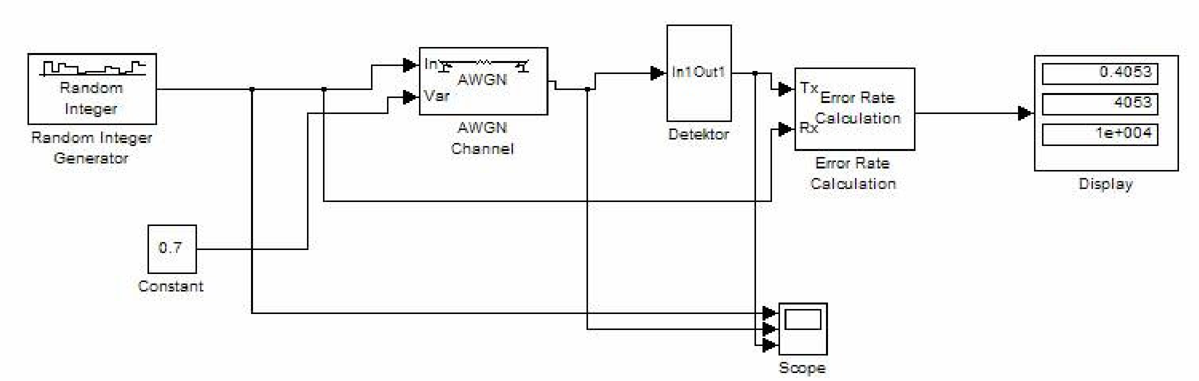
σ^2	σ	**P_e theoretisch**	**rel. Fehlerhäufigkeit**	**Anzahl Fehler**	**Werte**
0,01	0,1	$2{,}8655 \cdot 10^{-7}$	$3{,}8 \cdot 10^{-7}$	19	$5 \cdot 10^{7}$
0,02	0,141421356	$2{,}0348 \cdot 10^{-4}$	$0{,}2072 \cdot 10^{-3}$	$1{,}036 \cdot 10^{4}$	$5 \cdot 10^{7}$
0,05	0,223606798	0,0127	0,01271	$6{,}353 \cdot 10^{5}$	$5 \cdot 10^{7}$
0,07	0,264575131	0,0294	0,02944	$1{,}472 \cdot 10^{6}$	$5 \cdot 10^{7}$
0,1	0,316227766	0,0569	0,05698	$2{,}849 \cdot 10^{6}$	$5 \cdot 10^{7}$
0,2	0,447213595	0,1318	0,1319	$6{,}594 \cdot 10^{6}$	$5 \cdot 10^{7}$
0,5	0,707106781	0,2398	0,2399	$1{,}2 \cdot 10^{7}$	$5 \cdot 10^{7}$
0,7	0,836660027	0,275	0,2752	$1{,}376 \cdot 10^{7}$	$5 \cdot 10^{7}$
1	1	0,3085	0,3088	$1{,}544 \cdot 10^{7}$	$5 \cdot 10^{7}$
2	1,414213562	0,3618	0,362	$1{,}81 \cdot 10^{7}$	$5 \cdot 10^{7}$

Sigma² (σ^2) ist die Standardabweichung, die verändert wurde. σ berechnet sich als die Wurzel von letzterem, P_e wird durch MATLAB mit der eingangs erwähnten Formel berechnet (für $s_d = 1$). Die relative Fehlerhäufigkeit (P_e theoretisch) wird in der folgenden Abbildung mit der durch die durch die Simulation gewonnene relative Fehlerhäufigkeit verglichen. Wie man deutlich erkennen kann, ist die Abweichung zwischen Simulation und theoretisch ermitteltem Wert bei 50 Millionen simulierten Bits kaum mehr erkennbar.
Anmerkung zu den Ergbnissen: da der Zufall, den der Computer erzeugt, nicht wirklich zufällig ist, kann es vorkommen, dass bei unterschiedlichen Startwerten des Zufallsgenerators (Seed) minimal andere Fehlerwahrscheinlichkeiten auftreten.



2.2 Verrauschtes quaternäres Signal

Nun sollte das Procedere von 2.1 auf ein quaternäres Signal (Signal mit 4 Zuständen) angewandt werden. Die Vorgehensweise ist prinzipiell gleich, die Schaltung und die Formel unterscheiden sich allerdings minimal von jenen von 2.1.

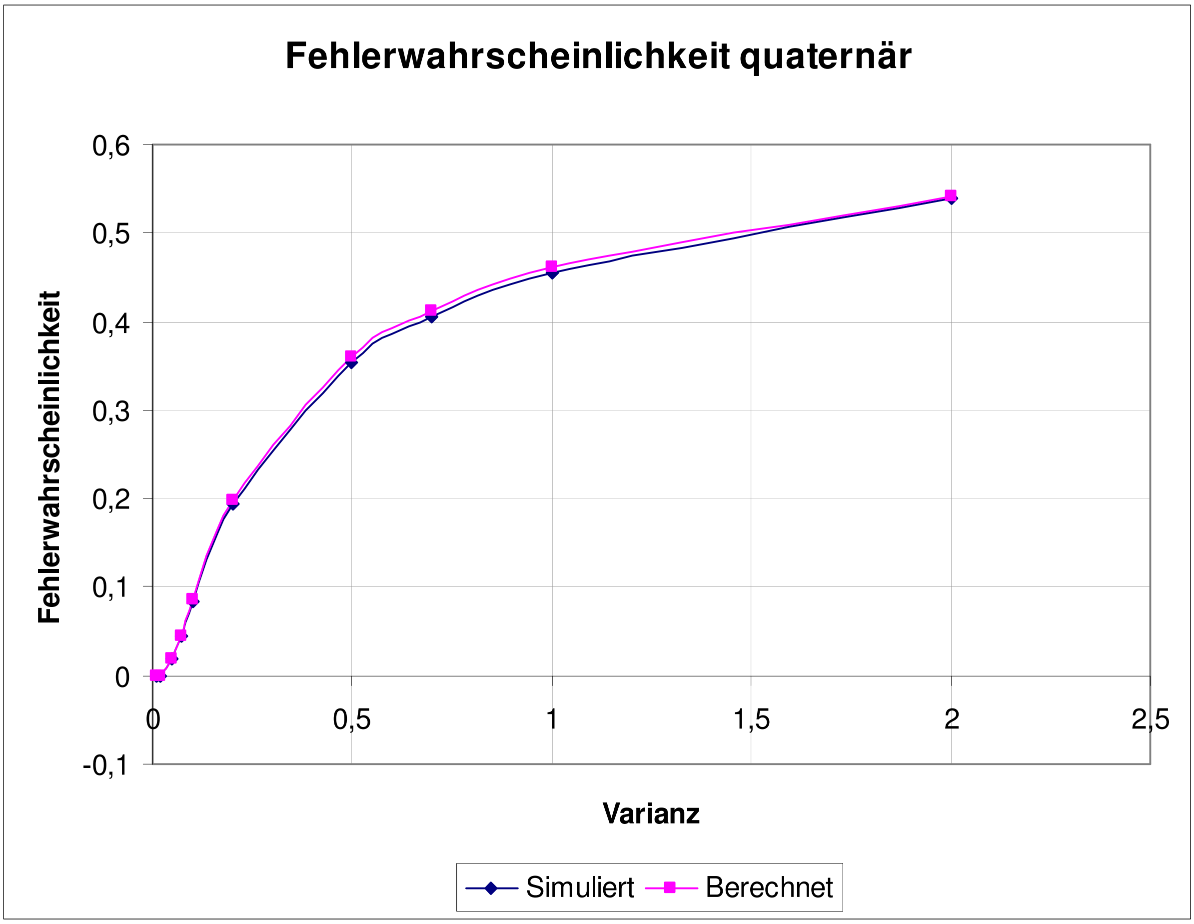


Die Schaltung unterscheidet sich in zwei wesentlichen Punkten: einerseits wird zur Erzeugung des zufälligen Signals ein Integer Generator verwendet (wir benötigen ja nicht mehr 2, sondern 4 verschiedene Zustände), andererseits wird zur Rückgewinnung ein „Detektor" verwendet, der die 4 Signalzustände rückgewinnen kann (etwas komplizierter als in 2.1).

Die Formel für P_e lautet nun $P_e = \frac{3}{4} erfc(\frac{s_d}{3 * 2\sqrt{2}\sigma})$, wobei s_d = 3 wegen der 4 Zustände.

σ^2	σ	P_e theoretisch	rel. Fehlerhäufigkeit	Anzahl Fehler	Werte
0,01	0,1	$4{,}2998 \cdot 10^{-7}$	0	0	10000
0,02	0,141421356	$3{,}0521 \cdot 10^{-4}$	0,0003	3	10000
0,05	0,223606798	0,019	0,0182	182	10000
0,07	0,264575131	0,0441	0,044	440	10000
0,1	0,316227766	0,0854	0,0839	839	10000
0,2	0,447213595	0,1977	0,1934	1934	10000
0,5	0,707106781	0,3596	0,3539	3539	10000
0,7	0,836660027	0,4126	0,4053	4053	10000
1	1	0,4628	0,4547	4547	10000
2	1,414213562	0,5426	0,5395	5395	10000

Die Werte in der Tabelle ergeben sich gleich wie in 2.1, einzig die Formel für P_e ist – wie eingangs erwähnt – anders.



Die Grafik zeigt, dass berechnete und simulierte Fehlerwahrscheinlichkeit wieder sehr nahe beieinanderliegen. Die Tatsache, dass in der Tabelle bei der Anzahl der Fehler einmal 0 auftritt, ist dadurch begründbar, dass die Fehlerwahrscheinlichkeit erst bei einer relativ langen Simulationsdauer hinreichend genau wird. Die beiden Kurven in der Grafik sind aber trotzdem sehr nahe beieinander, was zeigt, dass bereits 10000 Bits in der Simulation ausreichen, um den theoretisch berechneten Werten sehr nahe zu kommen.

Abschließend soll noch ein Bitfehler im Scope gezeigt werden. Die Grafik auf der nächsten Seite ist an der entsprechenden Stelle (einer von mehreren Fehlern wurde hervorgehoben) markiert. Die Grafik zeigt (von oben nach unten) das Originalsignal, das mit dem Rauschen überlagerte Signal und das rückgewonnene Signal.


4
2
0
-2
0
10
20
30
40
50