Laborprotokoll SSY

Diskrete Systeme II: Stabilitätsbetrachtungen und Systemantwort

Daniel Schrenk, Andreas Unterweger, ITS 2004

1. Einleitung

Ziel der Übung

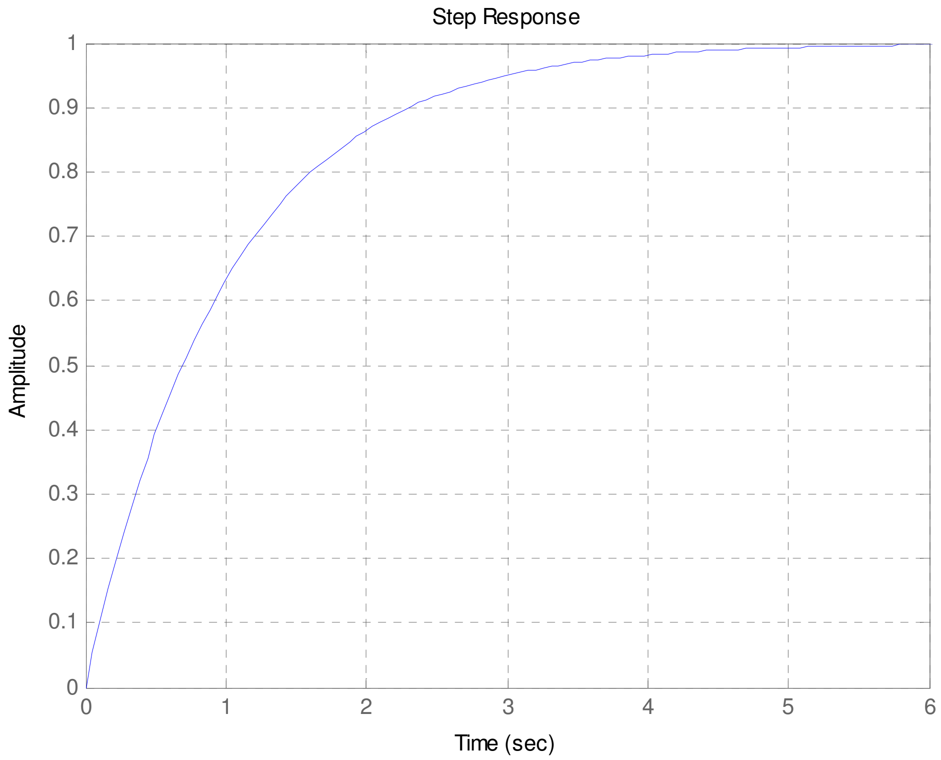
Bei dieser Übung ging es um die Untersuchung von Stabilitätskriterien und Systemantworten von diskreten Systemen. Mithilfe von Simulink und einigen Tools, die Matlab beiliegen, wurden die Übungen durchgeführt.
Anmerkung: sämtlicher Matlab-Code zu den Beispielen findet sich im Anhang.

2. Aufgabenstellungen

2.1 Diskreter Tiefpass

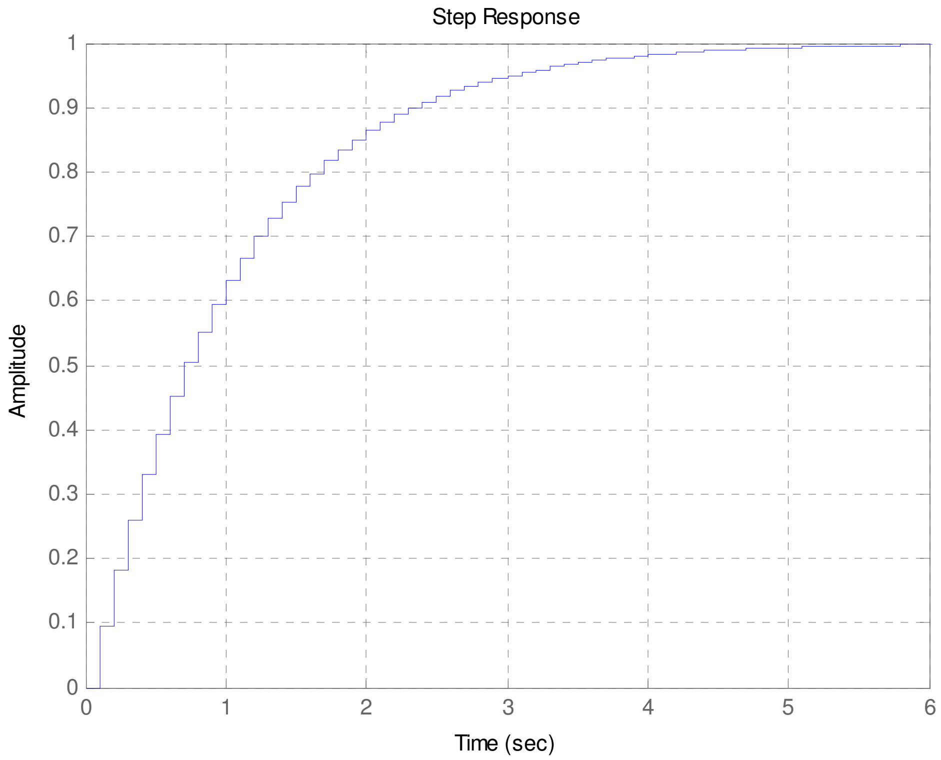
Gegeben ist das kontinuierliche System $G(s) = \frac{1}{s+1}$, welches einen Tiefpass 1. Ordnung darstellt. Letzteres soll in ein diskretes Übertragungssystem H(z) umgewandelt werden, was durch eine Substitution von s durch z (leider) nicht möglich ist. Daher muss der Befehl c2d verwendet werden. Die Übertragungsfunktion lautet dann $H(z) = \frac{0,09516}{z - 0,9048}$.

Sprungantwort des kontinuierlichen Systems:



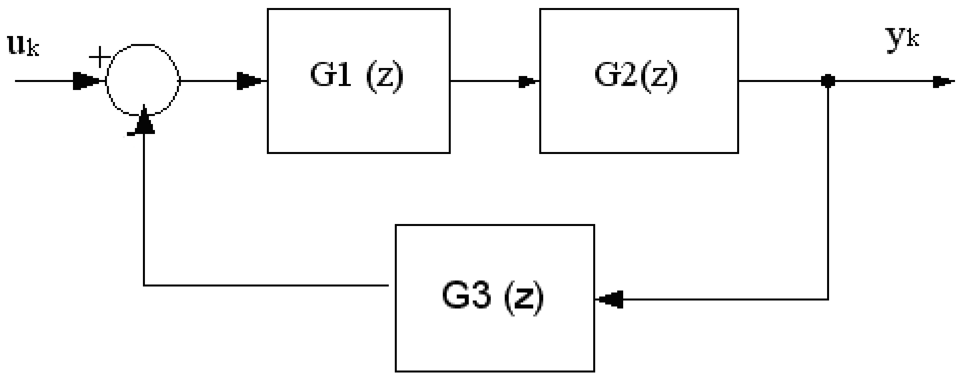
Sprungantwort des diskreten Systems:

Wie man gut erkennen kann, ist die Sprungantwort des diskreten Systems „kantiger“, da es nur zu den Zeitpunkten 0,1, 0,2, … s abgetastet wird.



2.2 Zusammensetzung von diskreten Systemen

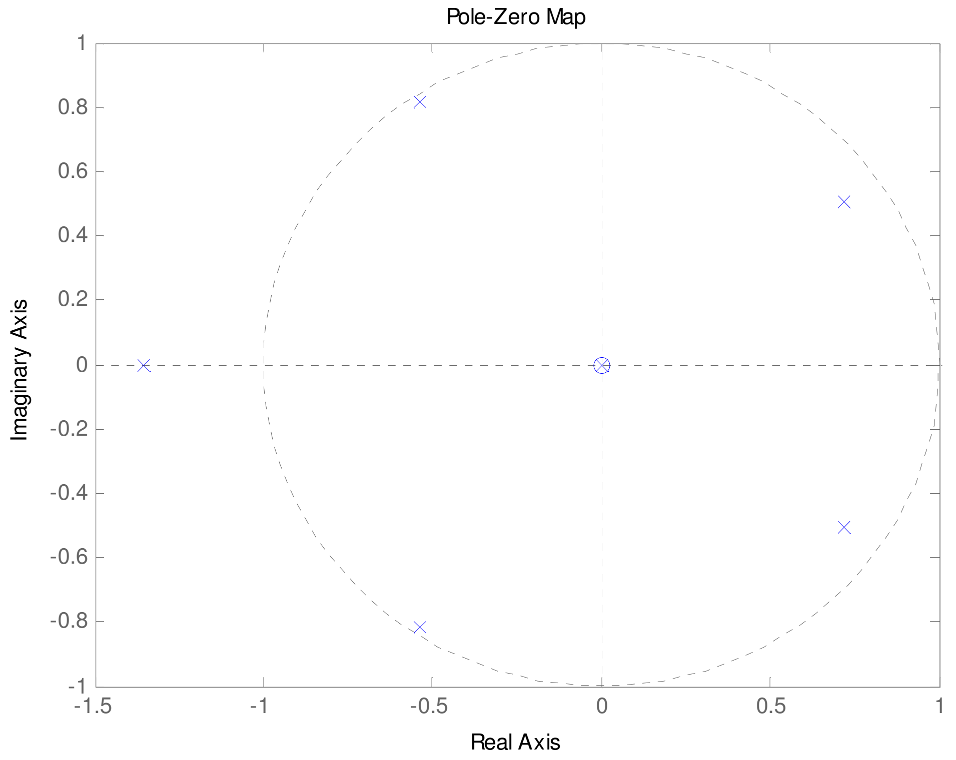
Nun soll nachfolgende Schaltung, bestehend aus 3 diskreten Übertragungssystemen, berechnet werden:



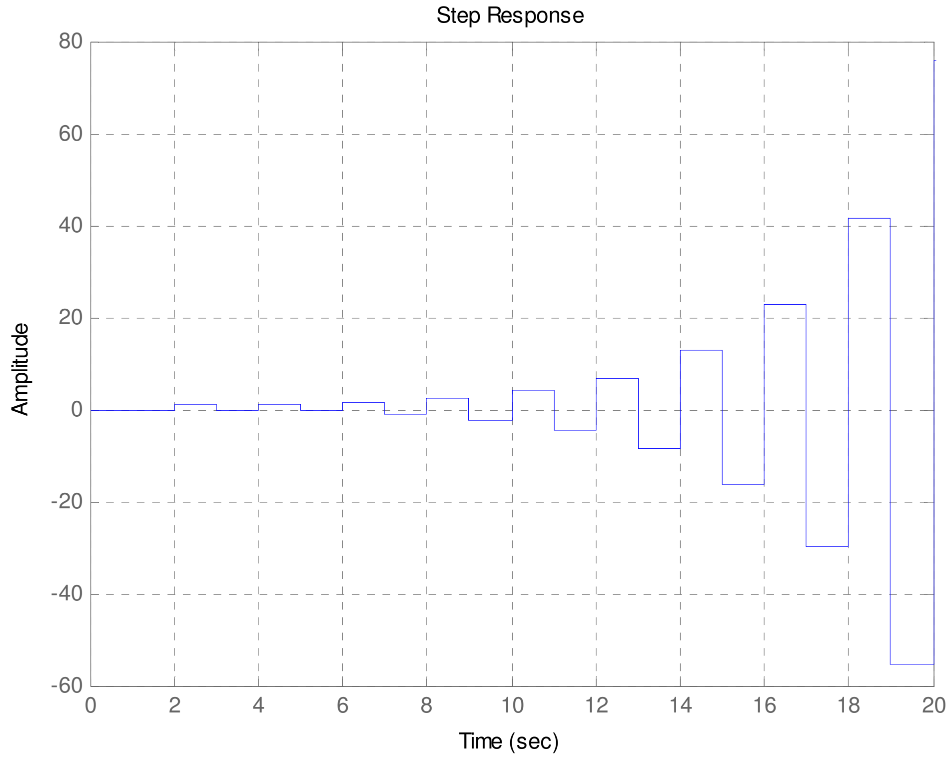
$$G1(z) = \frac{1}{z+1} \qquad G2(z) = \frac{z}{z^2 - 0.3} \qquad G3(z) = \frac{1}{z^3}$$

G1 und G2 werden, da sie in Serie geschalten sind, multipliziert (nennen wir dieses System Gserie). Gserie wird nun mit G3 rückgekoppelt (feedback) – man erhält das Gesamtsystem.
Beim Definieren der Systeme mithilfe der tf-Funktion muss darauf geachtet werden, dass der letzte Parameter (Samplingtime) gesetzt ist, damit Matlab das System als diskret erkennt. Da die Samplingtime hier unbekannt ist (bzw. keine Rolle spielt), wird sie auf -1 gesetzt.

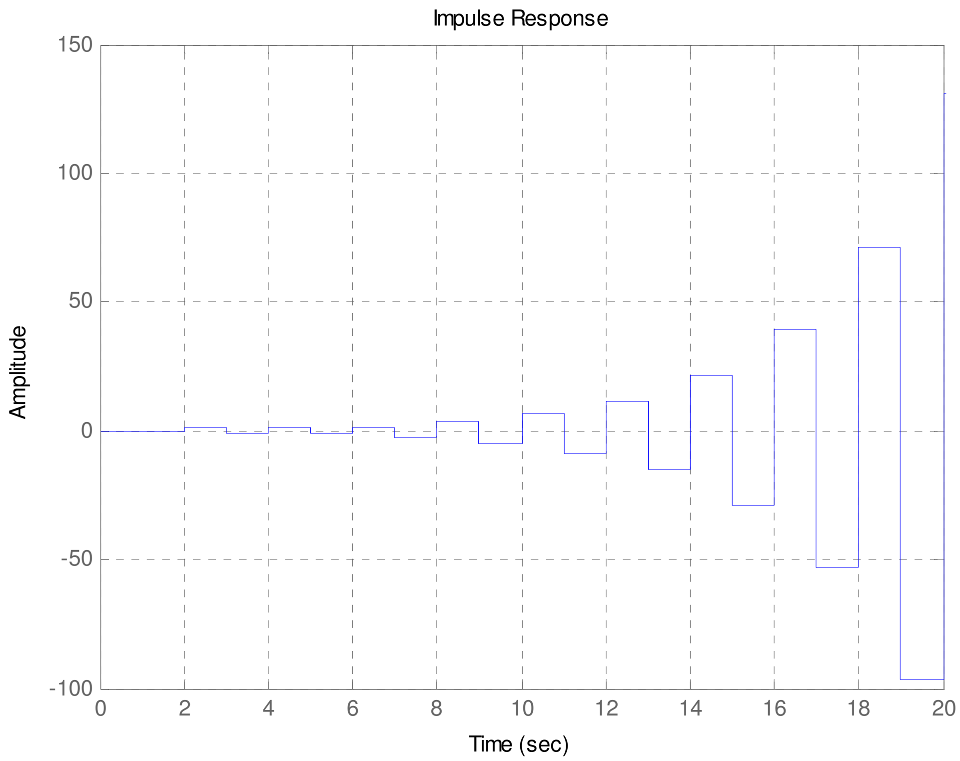
Das Pol-Nullstellen-Diagramm zeigt, dass einer der Pole außerhalb des Einheitskreises liegt – das System ist daher instabil.



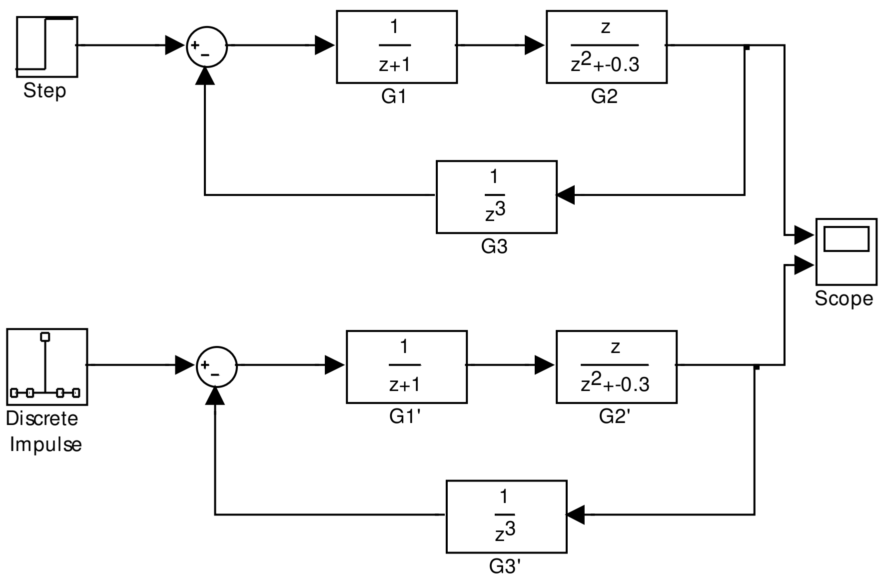
Die Sprungantwort bestätigt dies – das System schwingt auf:



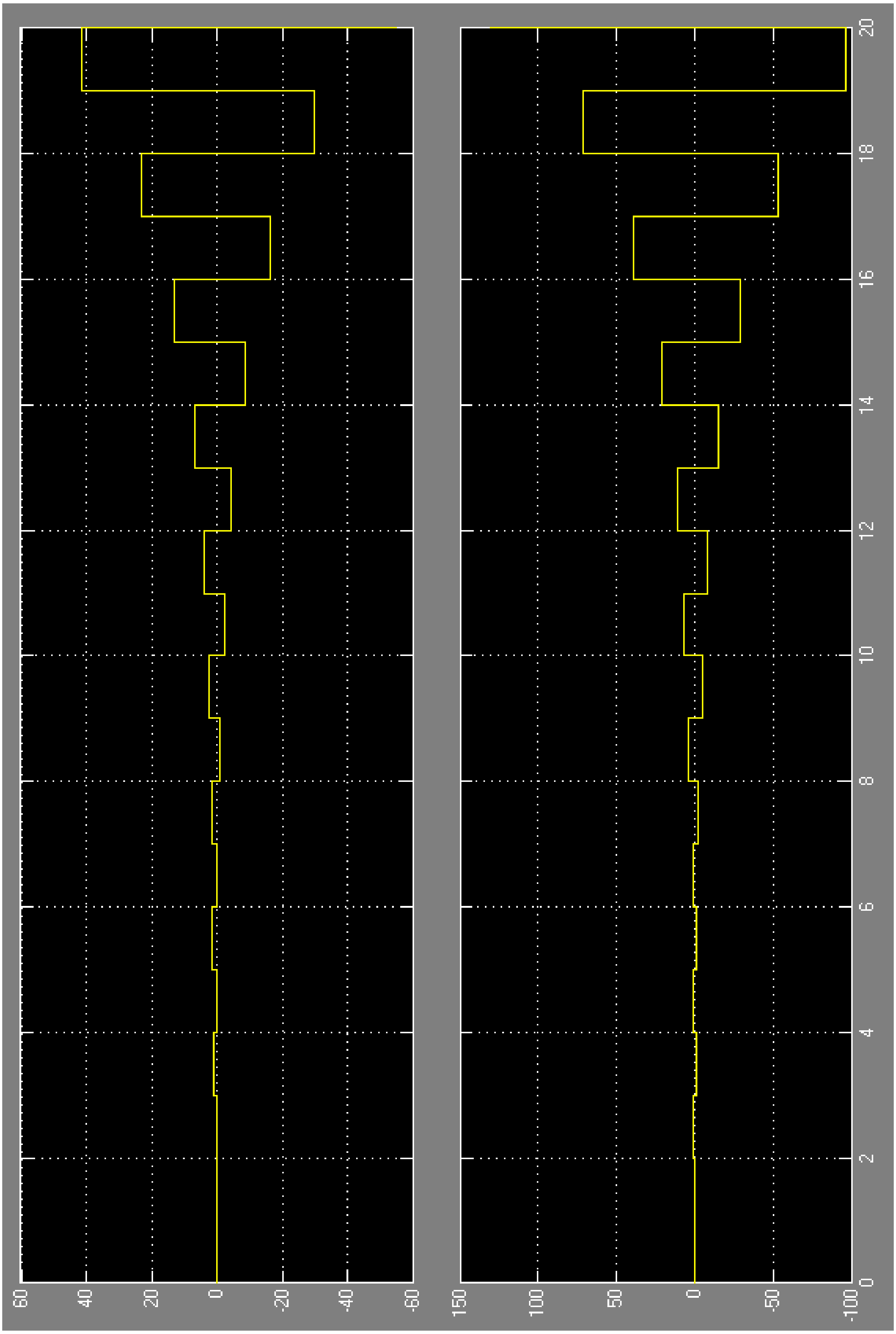
Auch die Impulsantwort zeigt das:



Die mit den Matlab-Befehlen berechneten Systemantworten sollten nun mithilfe von Simulink überprüft werden. Dazu wurde die Schaltung so umgebaut, dass sowohl die Sprung-, als auch die Impulsantwort dargestellt werden:



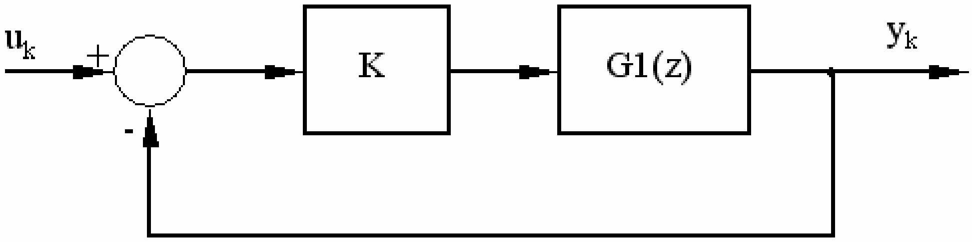
Der nachstehende Scope-Plot (oben Sprung-, unten Impuls-Antwort) bestätigt die Grafiken oben:


60
40
20
0
-20
-40
-60
150
100
50
0
-50
-100
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

2.3 k-Stabilität

Das in der folgenden Grafik abgebildete System soll auf Stabilität in Abhängigkeit von K untersucht werden. Dazu wird zuerst das Gesamtsystem berechnet und im Anschluss der stabile Wertebereich für K ermittelt:

$$G1(z) = \frac{1}{z^2 + 0.5z - 1}$$



K verstärkt das System G1, es wird also multipliziert (da in Serie): $G2 = K * G1 = K * \frac{1}{z^2 + 0{,}5z - 1} = \frac{K}{z^2 + 0{,}5z - 1}$. G2 wird nun rückgekoppelt – dadurch ergibt sich das Gesamtsystem mit $Gges = \frac{G2}{1+G2} = \frac{\frac{K}{z^2 + 0{,}5z - 1}}{1 + \frac{K}{z^2 + 0{,}5z - 1}} = \frac{\frac{K}{z^2 + 0{,}5z - 1}}{\frac{z^2 + 0{,}5z - 1 + K}{z^2 + 0{,}5z - 1}}$.

Die beiden Nenner im Doppelbruch kürzen sich und es ergibt sich $Gges = \frac{K}{z^2 + 0{,}5z - 1 + K}$.

Für die Stabilitätsuntersuchung sind nur die Polstellen interessant, weswegen der Nenner nullgesetzt wird: $z^2 + 0{,}5z + K - 1 = 0$. Die (kleine) Lösungsformel ergibt für die quadratische Gleichung $z_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{4^2} + 1 - K} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + 1 - K} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{17}{16} - K}$.

Nun werden zwei Fälle unterschieden:

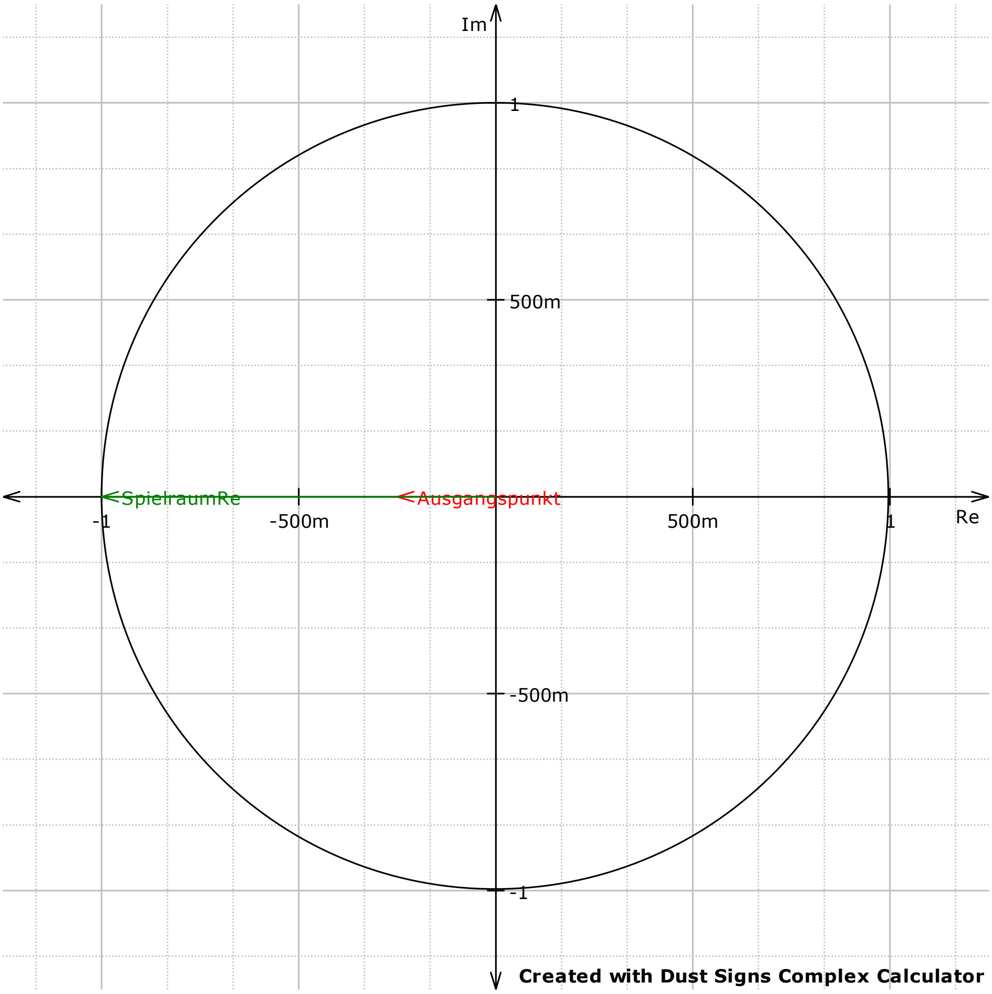
<u>1. Fall: Wurzel reell</u>

Ergibt die Wurzel einen reellen Wert, so darf ihr Wert maximal ¾ betragen, damit der Pol innerhalb des Einheitskreises auf der reellen Achse bleibt (ausgehend von -¼ hat man quasi ¾ Spielraum, bis der Rand des Kreises erreicht wird; vgl. Grafik nächste Seite).

Die Wurzel ist nur dann reell, wenn ihr Argument größer gleich null ist, also gilt $\frac{17}{16} - K \geq 0$, also $K \leq \frac{17}{16}$.

Die Wurzel darf, wie oben erwähnt, maximal einen Wert von ¾ haben, sofern sie von ¼ subtrahiert wird. Es gilt also:

$-\sqrt{\frac{17}{16} - K} > -\frac{3}{4}$ bzw. $\sqrt{\frac{17}{16} - K} < \frac{3}{4}$. Durch Quadrieren ergibt sich $\left|\frac{17}{16} - K\right| > \frac{9}{16}$. Da K laut der Berechnung von oben immer kleiner als $\frac{17}{16}$ ist, können die Betragsstriche weggelassen werden. Es ergibt sich damit $K > 0{,}5$ und mit der Bedingung von oben ($K \le \frac{17}{16}$) ein stabiler Wertebereich von $0{,}5 < K \le \frac{17}{16}$.



Spielraum reell

2. Fall: Wurzel imaginär

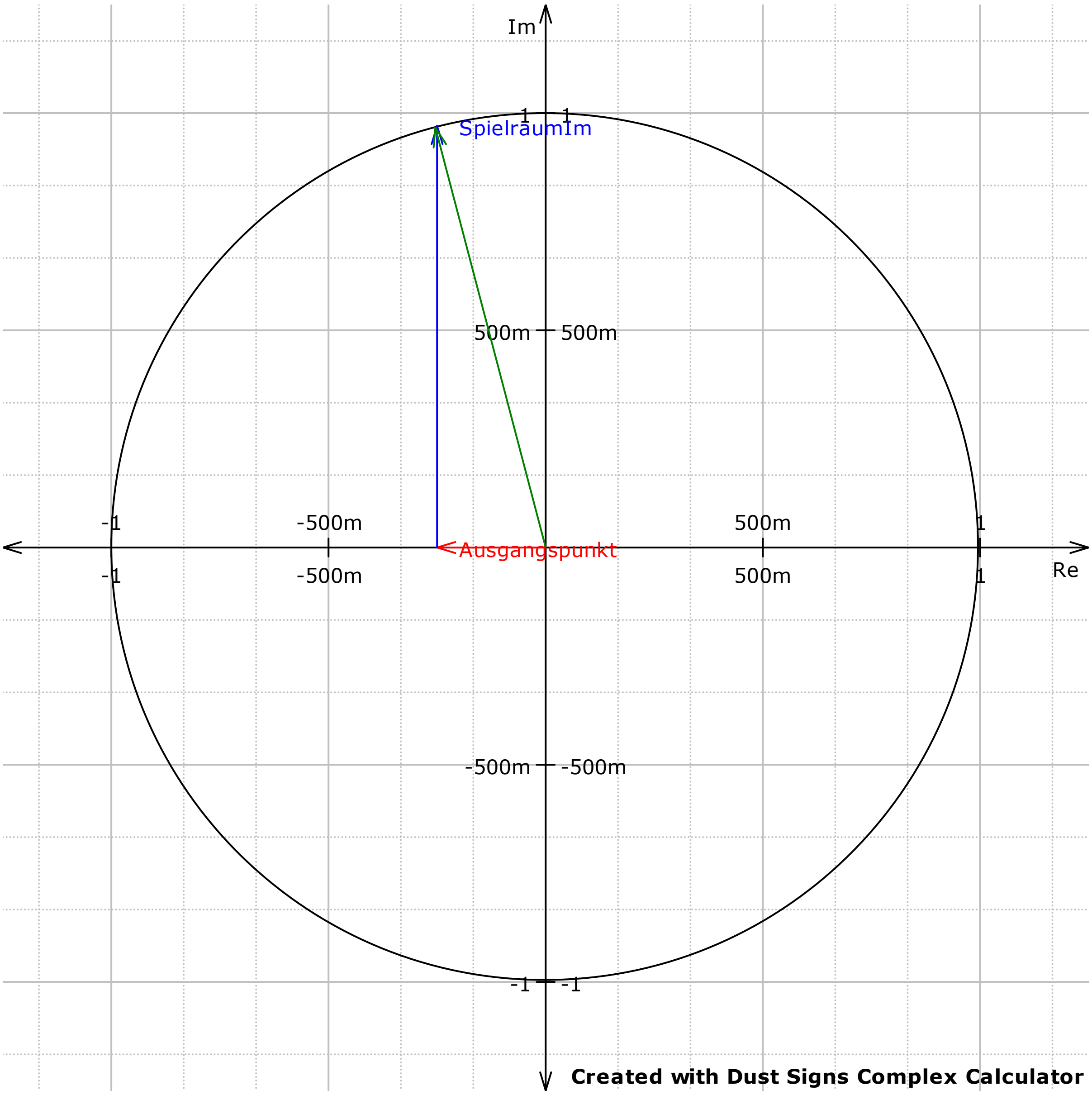
Ist die Wurzel imaginär (also das Argument unter der Wurzel kleiner als 0), ist der Spielraum parallel zur imaginären Achse bis zum Schnittpunkt mit dem Einheitskreis interessant. Da die Wurzel für $K \le \frac{17}{16}$ reell ist, muss sie umgekehrt für $K > \frac{17}{16}$ imaginär sein.

Wie aus der untenstehenden Grafik erkennbar ist, ist der Spielraum parallel zur imaginären Achse durch die blaue Linie definiert. Da der Ausgangspunkt (-¼) als auch die Länge der grünen Linie (Zeiger, der am Einheitskreis endet → Länge 1) bekannt ist, kann die Länge der blauen Linie (x) durch den Satz des Pythagoras berechnet werden: $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + x^2 = 1^2$, wodurch sich x mit $x = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{16}}$ ergibt.

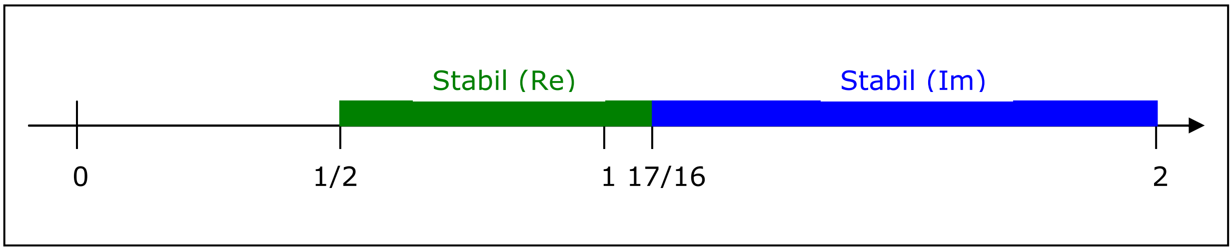
Das Argument der Wurzel darf also nicht größer werden als $\sqrt{\frac{15}{16}}$:

$\sqrt{\frac{17}{16} - K} < \sqrt{\frac{15}{16}}$, d.h. $\left|\frac{17}{16} - K\right| < \frac{15}{16}$. Da K laut obiger Definition immer größer als $\frac{17}{16}$ ist, können die Betragsstriche weggelassen werden, sofern die Vorzeichen umgedreht werden:

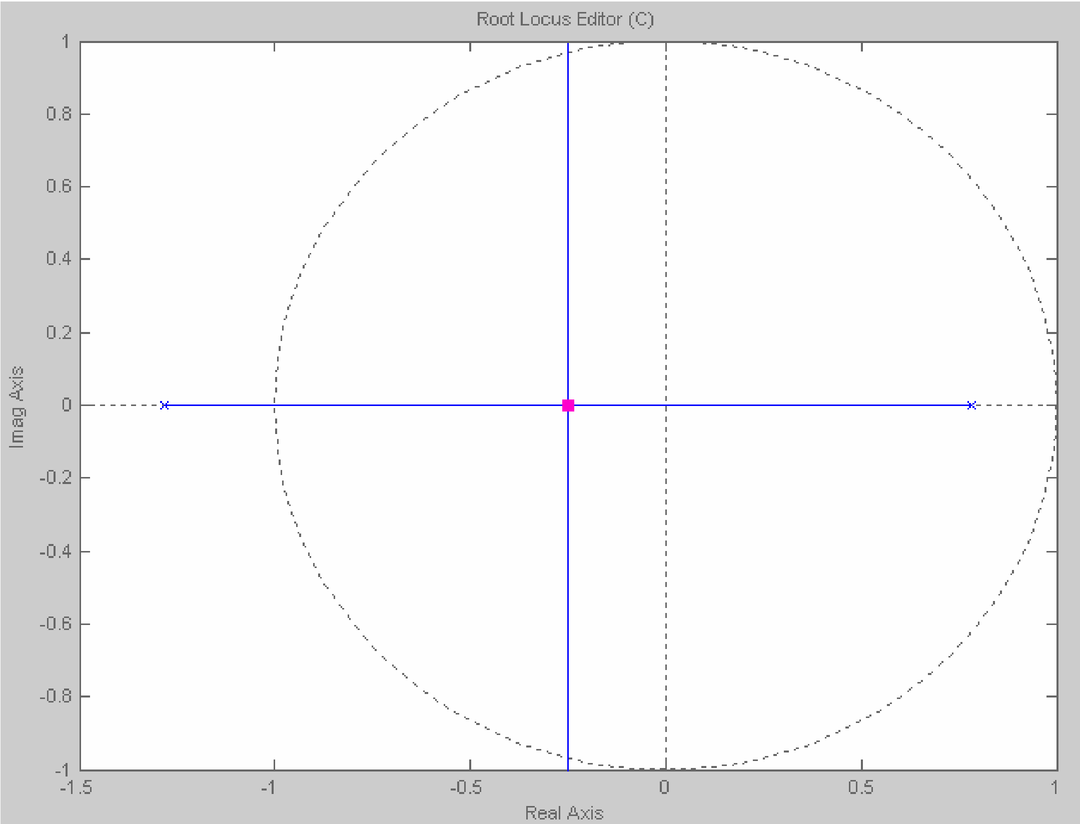
$K - \frac{17}{16} < \frac{15}{16}$ bzw. $K < 2$. Das System ist also auch zwischen $\frac{17}{16} < K < 2$ stabil.



Betrachtet man sowohl die stabilen Werte für K für reelle als auch für imaginäre Werte, erhält man einen Wertebereich von 0,5 bis 2, in dem das System stabil ist.



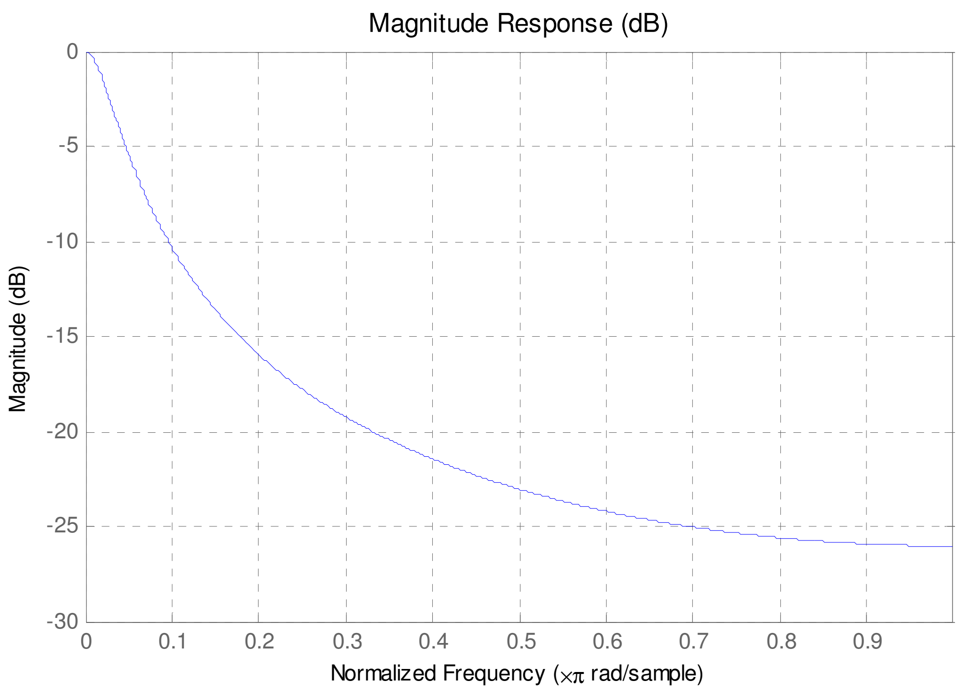
Matlab liefert ein Tool mit (Root Locus Editor), mit dem sich die Stabilität eines Systems in Abhängigkeit von K sehr leicht untersuchen lässt:



Mit dieser Darstellung lassen sich die berechneten Ergebnisse sehr leicht verifizieren, ebenso mit Simulink.

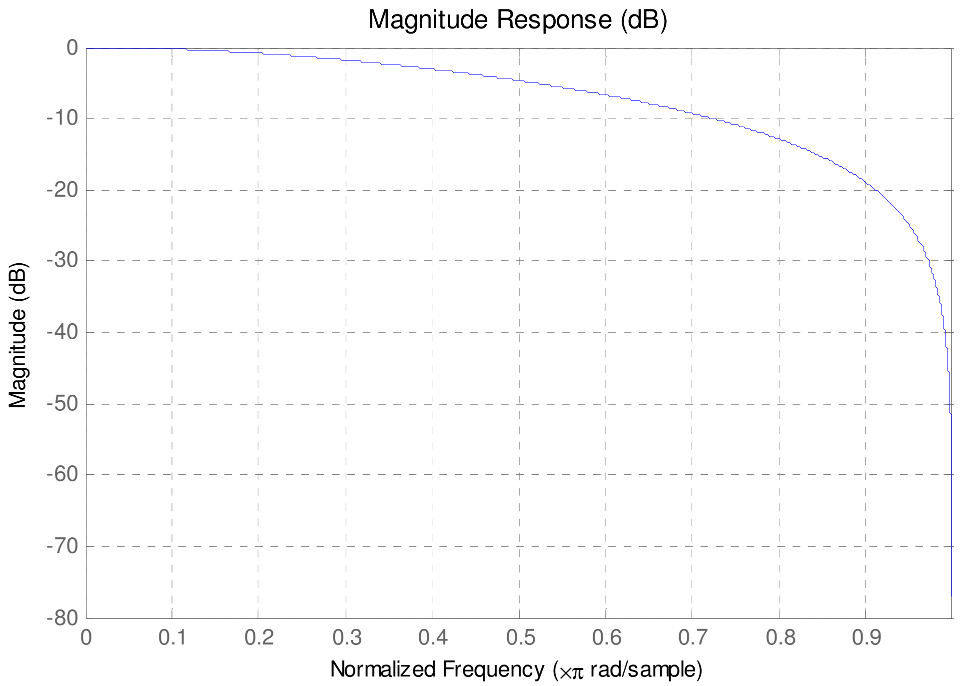
2.4 MATLAB Filter Visualization Tool und digitale Filter

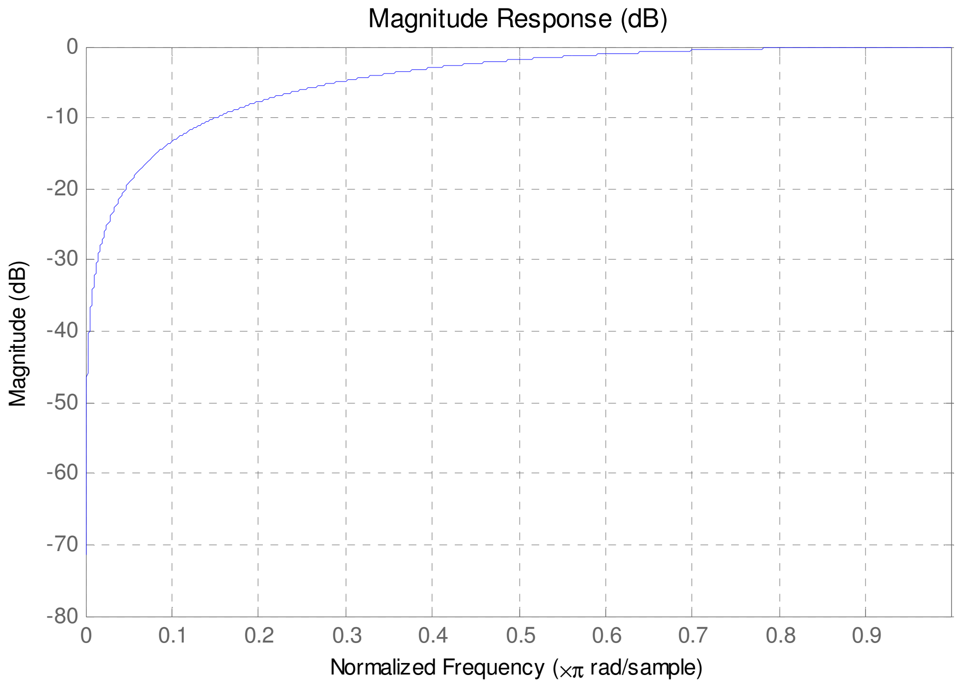
Anschließend sollte der diskrete Tiefpass aus 2.1 mit fvtool untersucht werden:



fvtool zeigt unter anderen (vgl. Grafik) den Frequenzgang eines Übertragungssystems an.

Abschließend sollten zwei Butterworth-Filter (ein Hoch- und ein Tiefpass) erstellt und mit dem Tiefpass aus 2.1 verglichen werden. Wieder wird fvtool zur Darstellung des Frequenzgangs verwendet:





Die obere Grafik stellt den Tiefpass, die untere den Hochpass dar. Mit dem Matlab-Befehl butter lassen sich die beiden Filter erstellen. Beide haben eine (normierte) Granzfreuqenz von 0,4 rad./Sample. Wie in der Grafik ersichtlich, weisen sie daher eine Dämpfung von -3dB bei $\Omega n = 0{,}4$ auf.

Abschließend wurden alle drei Filter auf ein Audiofile (Befehl „load handel") angewandt, Hoch- und Tiefpass filterten das Signal wie erwartet.

3. Matlab-Code

```
%1. Diskreter Tiefpass
G = tf([1], [1 1])
H = c2d(G, 0.1) %0,1s Samplingtime
step(G)
pause
step(H)
pause

%2. Zusammensetzung von diskreten Systemen
G1 = tf([1], [1 1], -1) %-1 => diskret mit unbekannter Samplingtime
G2 = tf([1 0], [1 0 -0.3], -1)
Gserie = G1 * G2
G3 = tf([1], [1 0 0 0], -1)
Gges = feedback(Gserie, G3)
pzmap(Gges)
pause
step(Gges, 20)
pause
impulse(Gges, 20)
pause

% 3. k-Stabilität
G = tf([1], [1 0.5 -1], -1)
rltool(G)

% 4. MATLAB Filter Visualization Tool und digitale Filter
nom = [0.09516] %Zähler Koeffizienten des diskreten Systems!
den = [1 -0.9048] %Nenner
fvtool(nom, den)
pause
[bl,al] = butter(1, 0.4, 'low')
fvtool(bl,al)
pause
[bh,ah] = butter(1, 0.4, 'high')
fvtool(bh,ah)
pause
load handel
soundsc(y)
pause
lowhandel = filter(den, nom, y)
soundsc(lowhandel)
pause
lowhandelbw = filter(bl, al, y)
soundsc(lowhandelbw)
pause
highhandelbw = filter(bh, ah, y)
soundsc(highhandelbw)
pause
```